بررسی نیم اولیه بودن حلقه $R[x;\alpha,\delta]$

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار باشد. Bell در [۳] ثابت کرد اگر R یک حلقه نیم اول گلدی چپ باشد و $\alpha: R \to R$ یک خودریختی و $\delta: R \to R$ یک تابع α—مشتق باشد آنگاه حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ نیم اولیه و گلدی چپ است و در همان مقاله این سوال را مطرح نمود: اگر $\alpha: R \to R$ تکریختی باشد آیا $R[x;\alpha,\delta]$ نیم اولیه و گلدی چپ است؟ در این طرح به این سوال پاسخ مثبت می دهیم و آن را ثابت می کنیم.

فصل ۱

۱.۱ تعاریف و رابطه بین ایده آلهای حلقه R و توسیع جردن حلقه R

تعریف ۱.۱.۱ زیرحلقه S از حلقه R را پوچ نامیم هرگاه هر عنصر آن پوچ توان باشد یعنی برای هر عنصر $x \in S$ عدد طبیعی n وجود داشته باشد بقسمی که $x^n = 0$. گوییم S پوچ توان است هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد بقسمی که $S^n = 0$.

تعریف ۲.۱.۱ رادیکال پوچ حلقه R را با علامت $N(R)$ نمایش می دهیم و با مجموع تمام ایده آلهای چپ پوچ توان R برابر است. $N(R)$ با مجموع تمام ایده آلهای راست پوچ توان R نیز برابر است. اگر $N(R) = 0$، گوییم R یک حلقه نیم اول است. گوییم R یک حلقه اول است هرگاه A و B دو ایده آل از حلقه R باشند و $AB = 0$، آنگاه $A = 0$ یا $B = 0$. ایده آل P را اول نامیم هرگاه حلقه $\frac{R}{P}$ اول باشد و ایده آل P را نیم اول نامیم هرگاه حلقه $\frac{R}{P}$ نیم اول باشد.

تعریف ۳.۱.۱ رادیکال جیکبسون حلقه R را با علامت $J(R)$ نمایش می دهیم و با اشتراک تمام ایده آلهای چپ ماکسیمال R برابر است. اگر $J(R) = 0$، گوییم R یک حلقه نیم اولیه است. $J(R)$ با اشتراک تمام ایده آلهای راست ماکسیمال R نیز برابر است.

تعریف ۴.۱.۱ عنصر $c \in R$ را منظم چپ نامیم هرگاه $rc = 0$ نتیجه دهد $r = 0$. عنصر $c \in R$ را منظم راست نامیم هرگاه $cr = 0$ نتیجه دهد $r = 0$. اگر c هم منظم راست و هم منظم چپ باشد گوییم c یک عنصر منظم است. مجموعه تمام عناصر منظم R را با علامت $C(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ $R-$مدول M را آرتینی نامیم هرگاه در شرط زنجیر کاهشی روی زیر مدولها صدق کند. $R-$مدول M را نوتری نامیم هرگاه در شرط زنجیر افزایشی روی زیر مدولها صدق کند. بنابراین حلقه R آرتینی چپ است هرگاه در شرط زنجیر کاهشی روی ایده آلهای چپ صدق کند. به همین نحو حلقه آرتینی راست، نوتری راست و نوتری چپ تعریف می شود.

تعریف ۶.۱.۱ گوییم R مدول M دارای بعد گلدی متناهی است هرگاه هیچ حاصلجمع مستقیم نامتناهی از زیر مدولهای M وجود نداشته باشد. مدول ناصفر M را یکنواخت نامیم هرگاه اشتراک هر دو زیر مدول ناصفر آن، ناصفر باشد. زیرمدول E در مدول M اساسی است هرگاه اشتراک E با هر زیرمدول ناصفر از M ناصفر باشد. با علامت $E \leq_e M$

نمایش داده می شود. اگر $R-$مدول M دارای بعد متناهی گلدی باشد آنگاه ماکزیمم طول حاصلجمع مستقیم زیرمدولهای یکنواخت M را بعد گلدی M نامیم. حلقه R را گلدی چپ نامیم هرگاه بعد گلدی $_RR$ متناهی بوده و در شرط زنجیر افزایشی روی پوچسازهای چپ صدق کند.

تعریف **۷.۱.۱** فرض کنیم S یک زیر مجموعه بسته ضربی از عناصر منظم حلقه R باشد. دراینصورت حلقه حاصل از موضعی نمودن R نسبت به S را با علامت $S^{-1}R$ نمایش می دهیم و حلقه ای است که:

۱— هر عنصر از S در $S^{-1}R$ وارون پذیر است.

۲— هر عنصر از $S^{-1}R$ را بتوان به فرم $s^{-1}r$ نوشت بطوری که $r \in R$ و $s \in S$. ثابت شده است حلقه $S^{-1}R$ وجود دارد اگر و تنها اگر S یک زیر مجموعه اُر چپ حلقه R باشد یعنی برای هر $s \in S$ و برای هر $r \in R$، عناصر $s_1 \in S$ و $r_1 \in R$ وجود داشته باشند بطوری که $s_1r = r_1s$. اگر S مجموعه تمام عناصر منظم حلقه R باشد و S یک مجموعه اُر چپ حلقه R باشد آنگاه $S^{-1}R$ را حلقه کسرهای چپ R می نامند.

قضیه **۱.۱.۱** فرض کنیم R یک حلقه و $S \subseteq R$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از عناصر منظم R باشد. اگر S یک زیر مجموعه اُر چپ حلقه R باشد و Q و T دو حلقه حاصل از موضعی نمودن R نسبت به S باشند آنگاه Q و T یکریخت هستند.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه نوتری چپ باشد و در شرط a.c.c روی پوچسازهای راست صدق کند. فرض کنیم $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم باشد. در اینصورت $\alpha(N(R)) \subseteq N(R)$.

قضیه ۳.۱.۱ [۱۲] فرض کنیم $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم باشد. اگر حلقه R در حلقه آرتینی چپ Q مرتب چپ باشد آنگاه :

۱− $c \in R$ منظم است اگر و تنها اگر $\alpha(c)$ در R منظم باشد.

۲− می توان α را به طور منحصر بفرد به منومورفیسم $\overline{\alpha} : Q \to Q$ توسیع داد.

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنیم R در حلقه آرتینی چپ Q مرتب چپ باشد و $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم باشد. فرض کنیم $S = R[x; \alpha]$. دراینصورت S در حلقه آرتینی چپ Q^* مرتب چپ است. همچنین Q^* نیم ساده است اگر و تنها اگر R نیم اول باشد.

اثبات : به [۸ قضیه ۳.۱] رجوع کنید.

نتیجه ۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه نیم اول گلدی چپ باشد و $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم باشد. دراینصورت $S = R[x; \alpha]$ نیم اول گلدی چپ است.

اثبات : با استفاده از قضیه گلدی و قضیه قبل نتیجه حاصل است.

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه نیم ساده آرتینی باشد و $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم و $\delta : R \to R$ یک تابع α−مشتق باشد. دراینصورت حلقه های تقسیم

$D_1, \cdots, D_m$، منومورفیسم $\alpha_1 : D \to D$، تابع α_1—مشتق $\delta_1 : D \to D$ ($D = \oplus_{i=1}^{m} D_i$) و عناصر $v, u \in R$ (u یکه است) وجود دارند بطوری که $R[x; \alpha, \delta] \cong M_n(D[y; \alpha_1, \delta_1])$ ($y = ux + v$).

نتیجه **۲.۱.۱** فرض کنیم R یک حلقه نیم ساده آرتینی باشد و $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم و $\delta : R \to R$ یک تابع α—مشتق باشد. دراینصورت $R[x; \alpha, \delta]$ نیم اول و نوتری چپ است.

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار باشد. فرض کنیم $\alpha : R \to R$ یک درونریختی و $\delta : R \to R$ یک تابع α—مشتق باشد یعنی δ یک تابع جمعی روی R است و برای هر $a, b \in R$، $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$. حلقه چند جمله‌ایهای اریب $R[x; \alpha, \delta]$ شامل همهٔ مجموعهای صوری $\Sigma_{i=0}^{n} r_i x^i$ است که برای هر $0 \leq i \leq n$، $r_i \in R$. اعمال جمع و ضرب بطور طبیعی انجام می‌شود و عمل ضرب منوط به شرط $xr = \alpha(r)x + \delta(r)$ می‌باشد. Amitsur در [۱] ثابت کرد که اگر حلقه R ایده آل پوچ نداشته باشد آنگاه حلقه چندجمله ایها روی R ($R[x]$) نیم اولیه است. نویسندگان زیادی از جمله Bell در [۳] ثابت کرده اند اگر R یک حلقه نیم اول گلدی چپ باشد و $\alpha : R \to R$ یک خودریختی و $\delta : R \to R$ یک تابع α—مشتق باشد آنگاه حلقه $R[x; \alpha, \delta]$ نیم اولیه و گلدی چپ است و در همان مقاله این سوال را مطرح نمود: اگر $\alpha : R \to R$ تکریختی باشد آیا $R[x; \alpha, \delta]$ نیم اولیه و گلدی چپ است؟ اگر شرط پوشا بودن α را حذف کنیم مشکلات زیادی در تکنیکهای قبلی ایجاد می شود و نیاز به تکنیکهای جدیدی داریم. از جمله اگر I یک ایده آل چپ حلقه R باشد لزوماً $\alpha(I)$ یک ایده آل چپ R نیست. به عنوان

مثال اگر $\alpha : R \to R$ یک خودریختی و $C(\circ)$ مجموعه عناصر منظم R باشد آنگاه $\alpha(C(R)) \subseteq C(\circ)$. این نتیجه زمانی که α پوشا نباشد درست نیست. اماJategonekar در [۸] نشان داد اگر R یک حلقه نیم اول گلدی چپ باشد آنگاه $\alpha(C(R)) \subseteq C(R)$.

اگر X یک زیر مجموعه ناتهی از حلقه R باشد مجموعه پوچسازهای راست و مجموعه پوچسازهای چپ X را بترتیب به $r_R(X)$ و $\ell_R(X)$ نمایش می دهیم. فرض کنیم M یک $R-$مدول چپ باشد. در اینصورت مجموعه عناصر منظم R، زیر مدول اساسی و بعد گلدی M را بترتیب با $C_R(\circ)$، $\leq_e$ و $u.dim_R M$ نمایش می دهیم.

فرض کنیم α یک منومورفیسم روی حلقه R باشد و $R[x;\alpha]$ حلقه چند جمله ایهای اریب روی R باشد. می توان نشان داد $\{x^i\}_{i\geq\circ}$ یک زیرمجموعه اُر چپ از حلقه $R[x;\alpha]$ تشکیل می دهد. بنابراین می توانیم حلقه $R[x;\alpha]$ را موضعی نماییم و حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x,x^{-۱};\alpha]$ را تشکیل دهیم. زیر مجموعه $A = \{x^{-i}rx^i | i \geq \circ\}$ از حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x,x^{-۱};\alpha]$ را در نظر بگیرید. چون برای هر $j \geq \circ$، $x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{(i+j)}$، لذا می توان نشان داد A زیر حلقه ای از حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x,x^{-۱};\alpha]$ می باشد. در واقع دو عمل جمع و ضرب بصورت زیر می باشند

$$x^{-i}rx^i + x^{-j}sx^j = x^{-(i+j)}(\alpha^j(r) + \alpha^i(s))x^{(i+j)}$$

و

$$(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+j)}(\alpha^j(r)\alpha^i(s))x^{(i+j)}$$

می توان تابع α را به اتومورفیسمی از A با ضابطه $\alpha(x^{-i}rx^i) = x^{-i}\alpha(r)x^i$ توسیع داد.
حلقه A اولین بار توسط جردن [1] در مقاله [۱۰] تعریف شد.

تعریف ۸.۱.۱ ایده‌آل راست (چپ) I را بسته راست (چپ) نامیم هرگاه $\cup_{n\geq 0}\alpha^{-n}(\alpha^n(I)) \subseteq I$.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم $(I_j)_{j\geq 0}$ یک دنباله از ایده آلهای چپ حلقه R باشد. گوییم $(I_j)_{j\geq 0}$ یک α—دنباله است هرگاه برای هر i، $\alpha(I_i) \subseteq I_{i+1}$.

قضیه ۶.۱.۱ یک تناظر دوسویی و حافظ ترتیب مانند Γ از مجموعه تمام ایده آلهای چپ حلقه A به مجموعه تمام α—دنباله های چپ حلقه R با ضابطه $\Gamma(I) = \{I_i\}_{i\geq 0}$ وجود دارد بطوری که برای هر $i \geq 0$، $I_i = \{a \in R | x^{-i}ax^i \in I\}$. معکوس آن را با علامت Δ نمایش می دهیم و ضابطه آن $\Delta(\{I_i\}_{i\geq 0}) = \cup_{i\geq 0}x^{-i}I_ix^i$.
اثبات : فرض کنیم I یک ایده آل چپ حلقه A بوده و برای هر $i \geq 0$، $I_i = \{a \in R | x^{-i}ax^i \in I\}$. درنتیجه I_i یک ایده آل چپ حلقه R است. برای اینکه نشان دهیم I_i بسته است فرض کنیم $\alpha^n(r) \in R\alpha^n(I_i)$. درنتیجه $\alpha^n(r) = \sum_{j=1}^{q} r_j\alpha^n(a_j)$

---
[1] Jordan

بطوری که برای هر j، $r_j \in R$ و $a_j \in I_i$. بنابراین

$$x^{-i}rx^i = x^{-(n+i)}\alpha^n(r)x^{(n+i)}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} x^{-(n+i)}r_jx^{(n+i)}x^{-(n+i)}\alpha^n(a_j)x^{(n+i)}$$

$$= \sum_{j=1}^{q} x^{-(n+i)}r_jx^{(n+i)}x^{-i}a_jx^i \in I$$

درنتیجه I_i بسته است. چون برای هر $r \in R$، $x^{-i}rx^i = x^{-(i+1)}\alpha(r)x^{(i+1)}$، لذا $r \in I_i$ اگر و تنها اگر $\alpha(r) \in I_{i+1}$. بنابراین $\Gamma(I) = \{I_i\}_{i\geq 0}$ یک α—دنباله است. بوضوح Γ حافظ ترتیب است.

حال فرض کنیم $\{I_i\}_{i\geq 0}$ یک α—دنباله از ایده آل‌های چپ حلقه R باشد. فرض کنیم $I = \cup_{i\geq 0}x^{-i}I_ix^i$. چون $x^{-i}I_ix^i \subseteq x^{-(i+j)}I_{i+j}x^{(i+j)}$، لذا اگر $a, b \in I$، آنگاه $a - b \in I$. فرض کنیم $a = x^{-i}a_ix^i \in R$ و $x^{-n}rx^n \in A$. درنتیجه $(x^{-n}rx^n)(x^{-i}a_ix^i) = x^{-(n+i)}\alpha^i(r)\alpha^n(a_i)x^{(n+i)} \in x^{-(n+i)}I_{n+i}x^{(n+i)} \subseteq I$. بنابراین $I = \Delta(\{I_i\}_{i\geq 0})$ یک ایده آل چپ حلقه A است. بوضوح Δ حافظ ترتیب است و درنتیجه $\{I_i\}_{i\geq 0} \subseteq \Gamma\Delta(\{I_i\}_{i\geq 0})$. حال عکس رابطه شمول را ثابت می کنیم. فرض کنیم $x^{-i}rx^i \in \Delta(\{I_i\}_{i\geq 0})$. درنتیجه برای برخی j و برخی $a \in I_j$، $x^{-i}rx^i = x^{-j}ax^j$. درنتیجه $\alpha^j(r) = \alpha^i(a) \in I_{i+j}$ بوده و لذا $r \in \alpha^{-j}(I_{i+j}) = I_i$. بنابراین $\Gamma\Delta$ تابع همانی روی مجموعه α—دنباله های ایده آلهای چپ حلقه R است.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنیم $(I_j)_{j\geq \circ}$ یک α—دنباله از ایده آلهای چپ بسته R باشد. در اینصورت $\Delta((I_j)_{j\geq \circ})$ یک ایده آل حلقه $A(R,\alpha)$ است اگر و تنها اگر هر I_j یک ایده آل راست بسته R باشد.

اثبات : ابتدا فرض کنیم $I = \Delta((I_j)_{j\geq \circ})$ یک ایده آل از حلقه $A(R,\alpha)$ باشد. در نتیجه برای هر $j \geq \circ$ و هر $k \geq \circ$، $(x^{-j}I_jx^j)(x^{-(j+k}Rx^{j+k}) \subseteq I$. یعنی $(x^{-(j+k)}\alpha^k(I_j)Rx^{j+k}) \subseteq I$ و $\alpha^k(I_j)R \subseteq I_{j+k}$. اما $(I_j)_{j\geq \circ}$ یک α—دنباله است لذا برای هر $k \geq \circ$، $\alpha^{-k}(\alpha^k(I_j)R) \subseteq I_j$. بنابراین برای هر $k \geq \circ$، I_j یک ایده آل راست بسته R است.

بعکس، فرض کنیم هر I_i یک ایده آل راست بسته R باشد. به راحتی می توان نشان داد I یک ایده آل چپ حلقه $A(R,\alpha)$ است. فرض کنیم $i,j \geq \circ$ و $r,s \in R$، بطوری که $x^{-i}rx^i \in I$، یعنی $r \in I_i$. در نتیجه $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)\alpha^i(s)x^{i+j}$. چون $\alpha^j(r) \in I_{i+j}$ و I_{i+j} یک ایده آل راست R است لذا $\alpha^j(r)\alpha^i(s) \in I_{i+j}$. بنابراین $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) \in I$ بوده و لذا I یک ایده آل حلقه $A(R,\alpha)$ است.

تعریف ۱۰.۱.۱ ایده آل I از حلقه R را بسته نامیم هرگاه هم بسته راست و هم بسته چپ باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم A و B و C ایده آلهای چپی از حلقه $A(R,\alpha)$ بوده و $\Gamma(A)$، $\Gamma(B)$ و $\Gamma(C)$ بترتیب α—دنباله های $(A_i)_{i\geq \circ}$، $(B_i)_{i\geq \circ}$ و $(C_i)_{i\geq \circ}$ باشند. در اینصورت حاصلضرب $\Gamma(A)$ در $\Gamma(B)$ را با علامت $\Gamma(A)\Gamma(B)$ نمایش می دهیم و با دنباله $(A_iB_i)_{i\geq \circ}$ از ایده آلهای چپ R برابر است. گوییم $\Gamma(A)\Gamma(B) \subseteq G(P)$، هرگاه برای هر $i \geq \circ$، $A_iB_i \subseteq P_i$. فرض کنیم $G(P)$ یک α—دنباله از ایده آلهای چپ بسته R باشد.

در اینصورت $G(P)$ را اول نامیم هرگاه برای هر دو α—دنباله $\Gamma(A)$ و $\Gamma(B)$ از ایده آلهای چپ بسته حلقه R، اگر $\Gamma(A)\Gamma(B) \subseteq G(P)$، آنگاه $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(P)$ یا $\Gamma(B) \subseteq \Gamma(P)$.

قضیه **۷.۱.۱** ایده آل P از حلقه $A(R,\alpha)$ اول است اگر و تنها اگر α—دنباله $\Gamma(P)$ از ایده آلهای بسته R اول باشد.

اثبات : ابتدا فرض کنیم $\Gamma(P)$ یک α—دنباله اول باشد. بنا به قضیه ۱.۱.۱، P یک ایده آل حلقه $A(R,\alpha)$ است. فرض کنیم A و B دو ایده آل چپ از حلقه $A(R,\alpha)$ باشند بطوری که $AB \subseteq P$ و $r \in A_iB_i$. در نتیجه $r = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$، بطوری که برای هر $k = 1,...,n$، $x^{-i}a_kx^i \in A$ و $x^{-i}b_kx^i \in B$. از طرفی $x^{-i}rx^i = \sum_{k=1}^{n}(x^{-i}a_kx^i)(x^{-i}b_kx^i) \in AB$. لذا برای هر $i \geq 0$، $r \in (AB)_i$ بوده و در نتیجه $A_iB_i \subseteq (AB)_i$. چون $AB \subseteq P$، لذا $\Gamma(AB) \subseteq \Gamma(P)$ و لذا $A_iB_i \subseteq P_i$، یعنی $\Gamma(A)\Gamma(B) \subseteq \Gamma(P)$. چون $\Gamma(P)$ اول است لذا $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(P)$ یا $\Gamma(B) \subseteq \Gamma(P)$. در نتیجه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$. بنابراین P یک ایده آل اول حلقه $A(R,\alpha)$ است.

بعکس، فرض کنیم P یک ایده آل اول از حلقه $A(R,\alpha)$ باشد و $\Gamma(A)$ و $\Gamma(B)$ دو α—دنباله بسته از ایده آلهای چپ حلقه R باشند بطوری که $\Gamma(A)\Gamma(B) \subseteq G(P)$. بنا به قضیه ۱.۱.۱، $\Gamma(P)$ یک α—دنباله بسته از ایده آلهای R است. فرض کنیم $r \in (AB)_i$. در نتیجه $x^{-i}rx^i \in AB$ بوده و لذا $x^{-i}rx^i = \sum_{k=1}^{n}(x^{-i_k}a_kx^{i_k})...(x^{-j_k}b_kx^{j_k}) \in AB$، بطوری که برای هر $k = 1,...,n$، $x^{-i_k}a_kx^{i_k} \in A$ و $x^{-j_k}b_kx^{j_k} \in B$. فرض کنیم $j = max\{i_k, j_k | k = 1,...,n\}$. در نتیجه $x^{-i}rx^i = x^j[\sum_{k=1}^{n} \alpha^{j-i_k}(a_k)\alpha^{j-j_k}(b_k)]x^j$ و $\alpha^j(r) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^{i+j-i_k}(a_k)\alpha^{i+j-j_k}(b_k)$. چون $a_k \in A_{i_k}$ و $(A_i)_{i\geq 0}$ یک α—دنباله است لذا $\alpha^{i+j-i_k}(a_k) \in A_{i_k+i+j-i_k} = A_{i+j}$. به طور مشابه می توان نشان داد $\alpha^{i+j-j_k}(b_k) \in B_{i+j}$. بنابراین $\alpha^j(r) \in A_{i+j}B_{i+j}$ بوده و چون $\Gamma(A)\Gamma(B) \subseteq G(P)$، لذا

$\alpha^j(r) \in P_{i+j}$. اما $(P_i)_{i\geq \circ}$ یک α—دنباله است لذا $r \in P_i$. بنابراین، برای هر $i \geq \circ$، $(AB)_i \subseteq P_i$ و $\Gamma(AB) \subseteq \Gamma(P)$. با استفاده از Δ نتیجه می گیریم $AB \subseteq P$ بوده و چون P اول است لذا $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$. در نتیجه $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(P)$ یا $\Gamma(B) \subseteq \Gamma(P)$ است و لذا $\Gamma(P)$ یک α—دنباله است.

نتیجه ۳.۱.۱ حلقه $A(R, \alpha)$ اول است اگر و تنها اگر دو α—دنباله ناصفر از ایده آلهای چپ بسته R وجود نداشته باشند بطوری که حاصلضرب آنها صفر باشد.

اثبات : اگر در قضیه ۷.۱.۱، $p = \circ$ فرض شود نتیجه حاصل است.

مثال ۱.۱.۱ فرض کنیم K یک میدان و $\sigma : K \to K$ یک منومورفیسم باشد بطوریکه پوشا نیست. حلقه $R = K \oplus K$ و تابع $\alpha : R \to R$ با ضابطه $\alpha(x, y) = (y, \sigma(x))$ را در نظر بگیرید. بوضوح α یک منومورفیسم است اما پوشا نیست. در نتیجه $(\circ, K), (K, \circ), (\circ, K), \ldots$ و $(K, \circ,), (\circ, k), (K, \circ), \ldots$ تنها α—دنباله های بسته حلقه R هستند. چون حاصلضرب این α—دنباله های صفر است لذا بنابه نتیجه ۳.۱.۱، حلقه $A(R, \alpha)$ اول نیست.

نتیجه ۴.۱.۱ اگر حلقه R اول باشد آنگاه حلقه $A(R, \alpha)$ نیز اول است.

اثبات : فرض کنیم $(A_i)_{i\geq \circ}$ و $(B_i)_{i\geq \circ}$ دو α—دنباله از ایده آلهای چپ بسته حلقه R باشند و برای هر $i \geq \circ$، $A_i B_i = \circ$. چون حلقه R اول است لذا زیر دنباله ای نامتناهی از $(A_i)_{i\geq \circ}$ یا $(B_i)_{i\geq \circ}$ وجود دارد بطوری که تمام عناصر آن صفر هستند. فرض کنیم $(A_{i_k})_{k\geq \circ}$ زیر دنباله ای نامتناهی از $(A_i)_{i\geq \circ}$ باشد بطوری که تمام عناصر آن صفر هستند. فرض کنیم $i \geq \circ$. در نتیجه $k \geq \circ$ وجود دارد بطوری که $i_k \geq i$ و $A_i = \alpha^{i-i_k}(A_{i_k}) = \circ$. بنابراین برای هر $i \geq \circ$، $A_i = \circ$ بوده و لذا بنابه نتیجه ۳.۱.۱،

حلقه $A(R,\alpha)$ اول است.

حال ایده آلهای نیم اول حلقه $A(R,\alpha)$ را بررسی می کنیم.

تعریف **۱۲.۱.۱** فرض کنیم $\Gamma(P)$ یک $\alpha-$دنباله از ایده آلهای بسته R باشد. گوییم $\Gamma(P)$ نیم اول است هرگاه $\Gamma(A)$ یک $\alpha-$دنباله از ایده آلهای بسته R باشد و اگر برای n ای داشته باشیم $\Gamma(A)^n\subseteq\Gamma(P)$، آنگاه $\Gamma(A)\subseteq\Gamma(P)$.

قضیه **۸.۱.۱** ایده آل P از حلقه $A(R,\alpha)$ نیم اول است اگر و تنها اگر $\alpha-$دنباله $\Gamma(P)$ از ایده آلهای بسته R نیم اول باشد.

اثبات : ابتدا فرض کنیم $\Gamma(P)$ یک $\alpha-$دنباله از ایده آلهای بسته R باشد و A یک ایده آل چپ حلقه $A(R,\alpha)$ باشد بطوری که برای nای، $A^n\subseteq P$. بنا به قضیه ۱.۱.۱، P یک ایده آل حلقه $A(R,\alpha)$ است. فرض کنیم $i\geq 0$ و $r\in(A_i)^n$ $((A_i)=\Gamma(P))$. در نتیجه $r=\sum_{k=1}^m a_{1k}...a_{nk}$، بطوری که $a_{lk}\in A_i$، یعنی برای هر $l=1,...,n$ و هر $k=1,...,m$، $x^{-i}a_{lk}x^i\in A$. بنابراین

$$x^{-i}rx^i=x^i[\sum_{k=1}^m a_{1k}...a_{nk}]x^i=\sum_{k=1}^m(x^{-i}a_{1k}x^i)...(x^{-i}a_{nk}x^i)\in A^n$$

در نتیجه $(A_i)^n\subseteq(A^n)_i$. چون $A^n\subseteq P$، لذا برای هر $i\geq 0$، $(A^n)_i\subseteq P_i$. در نتیجه برای هر $i\geq 0$، $(A^n)\subseteq P_i$. اما $\Gamma(P)$ یک $\alpha-$دنباله نیم اول است، لذا $A_i\subseteq P_i$ یا $\Gamma(A)\subseteq\Gamma(P)$. با استفاده از Δ می توان نشان داد $A\subseteq P$ است و در نتیجه P یک ایده آل نیم اول حلقه $A(R,\alpha)$ است.

بعکس، فرض کنیم P یک ایده آل نیم اول حلقه $A(R,\alpha)$ باشد و $(A_i)_{i\geq 0}$ یک $\alpha-$دنباله از ایده آلهای چپ بسته R باشد بطوری که برای هر $i\geq 0$، $(A_i)^n\subseteq P_i$. فرض کنیم $r\in(A^n)_i$، یعنی $x^{-i}rx^i\in A^n$ و $x^{-i}rx^i=\sum_{k=1}^m(x^{-j_{1k}}a_{1k}x^{j_{1k}})...(x^{-j_{nk}}a_{nk}x^{j_{nk}})$،

بطوری که برای هر $l = 1, ..., n$ و هر $k = 1, ..., m$، $x^{-j_{lk}}a_{lk}x^{j_{lk}} \in A$. فرض کنیم $j = max\{j_{lk} | l = 1, ..., n, k = 1, ...m\}$. در نتیجه

$x^{-i}rx^{i} = x^{-j}[\sum_{k=1}^{m} \alpha^{j-j_{1k}}(a_{1k})...\alpha^{j-j_{nk}}(a_{nk})]x^{j}$ و

$x^{-(i+j)}\alpha^{j}(r)x^{i+j} = x^{-(i+j}[\sum_{k=1}^{m} \alpha^{i+j-j_{1k}}(a_{1k})...\alpha^{i+j-j_{nk}}(a_{nk})]x^{(i+j)}$ بوده و لذا

$\alpha^{j}(r) = \sum_{k=1}^{m} \alpha^{i+j-j_{1k}}(a_{1k})...\alpha^{i+j-j_{nk}}(a_{nk})$. چون $a_{lk} \in A_{j_{lk}}$، لذا برای هر $l = 1, ..., n, k = 1, ...m$، $\alpha^{i+j-j_{lk}}(a_{lk}) \in A_{j_{lk}+i+j-j_{lk}} = A_{i+j}$. بنابراین $\alpha^{j}(r) \in (A_{i+j})^{n} \subseteq P_{i+j}$. چون $(P_i)_{i\geq 0}$ یک α—دنباله است لذا $r \in P_i$ و برای هر $i \geq 0$، $(A^n)_i \subseteq P_i$. حال با اعمال Δ نتیجه می گیریم $A^n \subseteq P$، و چون P یک ایده آل نیم اول است لذا $A \subseteq P$ و در نتیجه $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(P)$. بنابراین $\Gamma(P)$ یک α—دنباله نیم اول است.

نتیجه ۵.۱.۱ حلقه $A(R, \alpha)$ نیم اول است اگر و تنها اگر α—دنباله ناصفر $(A_i)_{i\geq 0}$ از ایده آلهای چپ بسته R وجود نداشته باشد بطوری که به ازای $n \geq 0$ای، برای هر $i \geq 0$، $(A_i)^n = 0$.

اثبات : در قضیه قبل با فرض $P = 0$ نتیجه حاصل است.

نتیجه ۶.۱.۱ اگر حلقه R نیم اول باشد آنگاه حلقه $A(R, \alpha)$ نیم اول است.

اثبات : فرض کنیم $(A_i)_{i\geq 0}$ یک α—دنباله از ایده آلهای چپ بسته R وجود نداشته باشد بطوری که به ازای عدد طبیعی n، برای هر $i \geq 0$، $(A_i)^n = 0$. چون R نیم اول است لذا برای هر $i \geq 0$، $A_i = 0$ بوده و در نتیجه بنا به نتیه ۵.۱.۱، حلقه $A(R, \alpha)$ نیم اول است.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنیم K یک میدان و $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم باشد که پوشا نیست. فرض کنیم R حلقه ماتریسهای بالامثلثی $\begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ باشد. تابع $\sigma : R \to R$ با

ضابطه $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(k_1) & \alpha(k_2) \\ 0 & \alpha(k_3) \end{pmatrix}\sigma$ را در نظر بگیرید. فرض کنیم I ایده آل $\begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ از حلقه R باشد. اگر برای هر $i \geq 0$، $A_i = I$، آنگاه $(A_i)_{i\geq 0}$ یک α—دنباله ناصفر بوده اما $I^2 = 0$. به راحتی می توان نشان داد I یک ایده آل چپ بسته R است. درنتیجه بنا به نتیجه ۵.۱.۱، حلقه $A(R,\alpha)$ نیم اول نیست.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم $(B_k)_{k\in\Delta}$ خانواده ای از ایده آلهای چپ بسته حلقه $A(R,\alpha)$ باشد و α—دنباله های $\Gamma(B_k)$ و $\Gamma(\sum_{k\in\Delta} B_k)$ را بترتیب با $((B_k)_i)_{i\geq 0}$ و $(A_i)_{i\geq 0}$ نمایش می دهیم. در اینصورت برای هر $i \geq 0$، $A_i = \cup_{n\geq 0}\alpha^{-n}(\sum_{k\in\Delta}(B_k)_{i+n})$.

اثبات : فرض کنیم $r \in \cup_{n\geq 0}\alpha^{-n}(\sum_{k\in\Delta}(B_k)_{i+n})$. لذا $n \geq 0$ای وجود بطوری که $\alpha^n(r) = \sum_{k\in\Delta} b_k$ و برای هر $k \in \Delta$، $x^{-(i+n)}b_k x^{i+n} \in B_k$. بنابراین $x^{-(i+n)}\alpha^n(r)x^{(i+n)} = \sum_{k\in\Delta} x^{-(i+n)}b_k x^{(i+n)} \in \sum_{k\in\Delta} B_k$. اما $x^{-(i+n)}\alpha^n(r)x^{(i+n)} = x^{-i}rx^i$، لذا $r \in A_i$ و برای هر $i \geq 0$، $\cup_{n\geq 0}\alpha^{-n}(\sum_{k\in\Delta}(B_k)_{i+n}) \subseteq A_i$. حال فرض کنیم $r \in A_i$، یعنی $x^{-i}rx^i \in \sum_{k\in\Delta} B_k$ و $x^{-i}rx^i = \sum_{k\in\Delta} x^{-j_k}b_k x^{j_k}$، بطوری که برای هر $k \in \Delta$، $x^{-j_k}b_k x^{j_k} \in B_k$. فرض کنیم $j = i + max\{j_k | k \in \Delta, b_k \neq 0\}$. در نتیجه $x^{-j}\alpha^{j-i}(r)x^j = x^{-j}[\sum_{k\in\Delta}\alpha^{j-j_k}(b_k)]x^j$، یعنی $\alpha^{j-i} = \sum_{k\in\Delta}\alpha^{j-j_k}(b_k)$. چون $b_k \in (B_k)_{j_k}$، لذا $\alpha^{j-j_k}(b_k) \in (B_k)_j$ بوده و در نتیجه $\alpha^{j-i} \in \sum_{k\in\Delta}(B_k)_j$. فرض کنیم $n = j - i$، در نتیجه $\alpha^n(r) \in \sum_{k\in\Delta}(B_k)_{i+n}$ بوده و لذا $A_i = \cup_{n\geq 0}\alpha^{-n}(\sum_{k\in\Delta}(B_k)_{i+n})$.

توجه ۱.۱.۱ در و اقع برای هر $i \geq 0$، $(\alpha^{-n}(\sum_{k\in\Delta}(B_k)_{i+n}))_{n\geq 0}$ یک دنباله افزایشی از ایده آلهای چپ حلقه R است. زیرا برای $n \geq 0$، فرض کنیم $\alpha^n(r) \in \sum_{k\in\Delta}(B_k)_{i+n}$.

در نتیجه $\alpha^n(r)=\sum_{k\in\Delta}(b_k)$، بطوری که $x^{-(i+n)}b_kx^{(i+n)}\in B_k$. بنابراین $\alpha^{n+1}(r)=\sum_{k\in\Delta}\alpha(b_k)$ و $x^{-(i+n+1)}\alpha(b_k)x^{(i+n+1)}=x^{-(i+n)}b_kx^{(i+n)}\in B_k$ بوده و لذا $\alpha(b_k)\in(B_k)_{i+n+1}$ و $r\in\alpha^{-(n+1)}(\sum_{k\in\Delta}(B_k)_{i+n+1})$.

قضیه **۳.۱.۱** فرض کنیم $(B_k)_{k\in\Delta}$ خانواده ای از ایده آلهای چپ حلقه $A(R,\alpha)$ باشد. برای هر $k\in\Delta$، $\alpha-$دنباله های $\Gamma(B_k)$ را به $((B_k)_i)_{i\geq 0}$ نمایش می دهیم. در اینصورت مجموع $\sum_{k\in\Delta}B_k$ مستقیم است اگر و تنها اگر برای هر $l\geq 0$، $\sum_{k\in\Delta}(B_k)_l$ یک مجموع مستقیمی از ایده آلهای چپ R باشد.

اثبات : فرض کنیم $l\geq 0$ وجود داشته باشد بطوری که $\sum_{k\in\Delta}(B_k)_l$ یک مجموع مستقیم از ایده آلهای چپ R نباشد. در نتیجه زیر مجموعه متناهی $\{1,...,n\}$ از Δ و $0\neq r_k\in(B_k)_l$ $(k=1,...,n)$ وجود دارد بطوری که $\sum_{k=1}^n r_k=0$ بوده و درنتیجه $\sum_{k=1}^n x^{-l}r_kx^l=0$. اما برای هر $k=1,...,n$، $x^{-l}r_kx^l\in B_k$، لذا $\sum_{k\in\Delta}B_k$ یک جمع مستقیم نیست.

حال فرض کنیم $\sum_{k\in\Delta}B_k$ یک مجموع مستقیم نباشد. در نتیجه برای هر $k=1,...,n$، عنصر ناصفر $x^{-j_k}r_kx^{j_k}\in B_k$ وجود دارد بطوری که $\sum_{k=1}^n x^{-j_k}r_kx^{j_k}=0$. فرض کنیم $j=max\{j_k|k=1,...,n\}$. در نتیجه $\sum_{k=1}^n x^{-j}\alpha^{j-j_k}(r_k)x^j=0$ بوده و لذا $\sum_{k=1}^n\alpha^{j-j_k}(r_k)=0$. اما $r_k\in(B_k)_{j_k}$، لذا $\alpha^{i-j_k}(r_k)\in(B_k)_j$، و چون α یک منومورفیسم است لذا برای هر $k=1,...,n$، $\alpha^{j-j_k}(r_k)\neq 0$. بنابراین $\sum_{k\in\Delta}(B_k)_j$ یک مجموع مستقیم نیست.

نتیجه **۷.۱.۱** بعد گلدی حلقه A متناهی است اگر و تنها اگر مجموعه‌ای نامتناهی مانند $((B_k)_\ell)_{\ell\geq 0}$ از $\alpha-$دنباله های ناصفر از ایده آلهای چپ بسته R وجود نداشته باشد بطوری که برای هر $\ell \geq 0$، $\sum_{k\in\Delta}(B_k)_\ell$ یک جمع مستقیم باشد.

اثبات : نتیجه ای فوری از قضیه قبل است.

نتیجه **۸.۱.۱** اگر بعد گلدی چپ حلقه R عدد n باشد آنگاه بعد گلدی چپ حلقه A حداکثر n است.

اثبات : فرض کنیم چنین نباشد و $(B_k)_{1\leq k\leq n+1}$ یک مجموعه از ایده آلهای چپ ناصفر حلقه A باشد بطوری که مجموع آنها یک جمع مستقیم باشد. هر $((B_k)_\ell)_{\ell\geq 0}$ یک $\alpha-$دنباله ناصفر است لذا برای هر $1 \leq k \leq n+1$، $\ell_k \geq 0$ وجود دارد بطوری که اگر $\ell \geq \ell_k$، آنگاه $(B_k)_\ell \neq 0$. در غیر اینصورت، اگر ℓ_kای وجود نداشته باشد آنگاه $((B_k)_{\ell_i})_{i\geq 0}$ وجود دارد بطوری که برای هر $i \geq 0$، $(B_k)_{\ell_i} = 0$ بوده و لذا برای هر $\ell \geq 0$، $(B_k)_\ell = 0$. فرض کنیم $\ell = max\{\ell_k | 1 \leq k \leq n+1\}$. درنتیجه برای هر $1 \leq k \leq n+1$، $(B_k)_\ell \neq 0$ بوده و لذا بنابه قضیه قبل $\sum_{k=1}^{n+1}(B_k)_\ell$ یک مجموع مستقیم است. این امکان پذیر نیست زیرا بعد گلدی چپ حلقه R عدد n است.

۲.۱ بررسی نیم اولیه بودن حلقه $R[x;\alpha,\delta]$

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار باشد. Bell در [۳] ثابت کرد اگر R یک حلقه نیم اول گلدی چپ باشد و $\alpha : R \to R$ یک خودریختی و $\delta : R \to R$ یک تابع α—مشتق باشد آنگاه حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ نیم اولیه و گلدی چپ است و در همان مقاله این سوال را مطرح نمود: اگر $\alpha : R \to R$ تکریختی باشد آیا$R[x;\alpha,\delta]$ نیم اولیه و گلدی چپ است؟ در این بخش به این سوال پاسخ مثبت می دهیم و آن را ثابت می کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم I یک ایده آل چپ (راست) از حلقه R باشد. دراینصورت

الف— گوییم I یک α ایده آل چپ (راست) است هرگاه $\alpha(I) \subseteq (I)$.

ب— گوییم I یک ایده آل α—پایا است هرگاه $\alpha^{-1}(I) = I$.

ج— ایده آل α—پایای I را α—اول نامیم هرگاه B و C دو α—ایده آل R باشند بطوری که $BC \subseteq I$، آنگاه $B \subseteq I$ یا $C \subseteq I$. حلقه R را α—اول نامیم هرگاه ایده آل صفر α—اول باشد.

د— فرض کنیم α—ایده آل I از حلقه R وجود داشته باشد بطوری که $J = r_R(I) = \ell_R(I)$. دراینصورت گوییم J یک α—ایده آل پوچساز R است. هرα—ایده آل پوچساز یک α—ایده آل است. اگر J یک α—ایده آل پوچساز و α—اول باشد گوییم J یک α—ایده آل پوچساز α—اول است.

لم ۱.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه و $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم باشد. در اینصورت شرایط زیر معادلند:

۱− R یک حلقه α—اول است.

۲− اگر B و C دو α—ایده آل چپ باشند و $BC = 0$، آنگاه $B = 0$ یا $C = 0$.

۳− اگر $a, b \in R$ و برای هر $m, n \geq 0$، $\alpha^n(a)R\alpha^m(b) = 0$، آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

اثبات : معادل بودن (۱) و (۳) را ثابت می کنیم. فرض کنیم R یک حلقه α—اول باشد و برای هر $m, n \geq 0$، $\alpha^n(a)R\alpha^m(b) = 0$. α—ایده آل تولید شده توسط a و α—ایده آل تولید شده توسط b را بترتیب به I و J نمایش می دهیم. درنتیجه $IJ = 0$. چون R یک حلقه α—اول است لذا $I = 0$ یا $J = 0$. در نتیجه $a = 0$ یا $b = 0$.

بعکس، فرض کنیم I و J دو α—ایده آل از حلقه R باشند بطوری که $IJ = 0$. فرض کنیم $I \neq 0$ و $0 \neq a \in I$ و $b \in I$. درنتیجه برای هر $m, n \geq 0$، $\alpha^n(a)R\alpha^m(b) \subseteq IJ = 0$. لذا $b = 0$ بوده و درنتیجه $J = 0$.

فرض کنیم α یک منومورفیسم روی حلقه R باشد و $R[x; \alpha]$ حلقه چند جمله ایهای اریب روی R باشد. می توان نشان داد $\{x^i\}_{i \geq 0}$ یک زیرمجموعه اُر چپ از حلقه $R[x; \alpha]$ تشکیل می دهد. بنابراین می توانیم حلقه $R[x; \alpha]$ را موضعی نماییم و حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x, x^{-1}; \alpha]$ را تشکیل دهیم. زیر مجموعه $A = \{x^{-i}rx^i | i \geq 0\}$ از حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x, x^{-1}; \alpha]$ را در نظر بگیرید. چون برای هر $j \geq 0$، $x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{(i+j)}$، لذا می توان نشان داد A زیر حلقه ای از حلقه چند جمله ایهای اریب لوران $R[x, x^{-1}; \alpha]$ می باشد. در واقع دو عمل جمع و ضرب بصورت زیر می باشند $x^{-i}rx^i + x^{-j}sx^j = x^{-(i+j)}(\alpha^j(r) + \alpha^i(s))x^{(i+j)}$ و $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+j)}(\alpha^j(r)\alpha^i(s))x^{(i+j)}$. می توان تابع α را به اتومورفیسمی از A

با ضابطه $\alpha(x^{-i}rx^i)=x^{-i}\alpha(r)x^i$ توسیع داد. حلقه A اولین بار توسط جردن [۲] در مقاله [۱۰] تعریف شد.

لم ۲.۲.۱ R یک حلقه α—اول است اگر و تنها اگر A یک حلقه α—اول باشد.

اثبات : فرض کنیم R یک حلقه α—اول بوده و $x^{-i}ax^i$ و $x^{-j}bx^j$ دو عضو از حلقه A باشند بطوری که $i,j\geq 0$ و $a,b\in R$. فرض کنیم برای هر $t,s\geq 0$، $\alpha^t(x^{-i}ax^i)R\alpha^s(x^{-j}bx^j)=0$. در نتیجه برای هر $r\in R$، $x^{-(i+j)}\alpha^{t+j}(a)r\alpha^{(s+i)}(b)x^{(i+j)}=0$. بنابراین برای هر $t,s\geq 0$، $\alpha^t(\alpha^j(a))R\alpha^s(\alpha^i(b))=0$. درنتیجه بنابه لم ۱.۲.۱، $\alpha^i(b)=0$ یا $\alpha^j(b)=0$. چون α یک به یک است لذا $x^{-i}ax^i=0$ یا $x^{-j}bx^j=0$. بنابراین A یک حلقه α—اول است.

حال فرض کنیم A یک حلقه α—اول و I و J دو α—ایده آل حلقه R باشند بطوری که $IJ=0$. در نتیجه $\Delta(I)\Delta(J)=0$. چون A یک حلقه α—اول است لذا $\Delta(I)=0$ یا $\Delta(J)=0$. بنابراین $I=0$ یا $J=0$ بوده و درنتیجه R یک حلقه α—اول است.

لم ۳.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه و در شرط a.c.c روی پوچسازهای چپ صدق کند. فرض کنیم I یک α—ایده آل R باشد. دراینصورت $\ell_R(I)$ یک ایده آل α—پایای R است.

اثبات : چون $\ell_R(I)\subseteq\ell_R(\alpha(I))\subseteq\cdots$، لذا عدد $k\geq 0$ وجود دارد بطوری که $\ell(\alpha^k(I))=\ell(\alpha^{k+1}(I))$. لذا $\alpha(a)\in\ell(I)$ و درنتیجه $\alpha(\ell(I))\subseteq\ell(I)$. حال فرض کنیم $\alpha(a)\in\ell(I)$. دراینصورت $\alpha(aI)=\alpha(a)\alpha(I)\subseteq\alpha(a)I$ بوده و لذا $aI=0$. بنابراین $\alpha^{-1}(\ell(I))=\ell(I)$.

---

[۲] Jordan

لم ۴.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه نیم اول گلدی چپ باشد. دراینصورت $C_A(\circ) = \cup_{i\geq\circ} x^{-i} C_R(\circ) x^i$.

اثبات : از [۸] نتیجه می شود.

تعریف ۲.۲.۱ ایده آل α—اول I را یک ایده آل α—اول مینیمال نامیم هرگاه شامل هیچ ایده آل α—اول غیر از خودش نباشد.

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه نیم اول و در شرط a.c.c روی پوچسازهای راست یا چپ صدق کند. دراینصورت تعداد ایده آلهای α—اول مینیمال حلقه R متناهی بوده و اشتراک آنها صفر است. همچنین ایده آل α—اول I یک ایده آل α—اول مینیمال است اگر و تنها اگر α—ایده آل پوچ ساز باشد.

اثبات : ابتدا نشان می دهیم هر α—ایده آل پوچساز شامل حاصلضربی از α—ایده آلهای پوچساز است. فرض کنیم L یک α—ایده آل پوچساز باشد بطوری که در بین α—ایده آلهای پوچسازی که شامل هیچ حاصلضربی از α ایده آلهای پوچساز نیستند ماکسیمال است. درنتیجه α—ایده آلی مانند I وجود دارد بطوری که $L = r_R(I) = \ell_R(I)$. بنابه لم ۳.۲.۱، $\alpha^{-1}(L) = L$. درنتیجه L نمی تواند α—اول باشد. درغیر اینصورت، چون L یک α—ایده آل پوچساز است لذا شامل حاصلضربی از ایده آلهای α—اول پوچساز است. درنتیجه α—ایده آلهای T و K از R وجود دارند بطوریکه اکیداً شامل L بوده و $TK \subseteq L$. فرض کنیم $C = r_R(IT)$ و $B =_R (CI)$. درنتیجه بنابه [۱۲، گزاره ۲.۲.۱۴] $\ell_R(IT) = C = r_R(IT)$ و $r_R(CI) = B = \ell_R(CI)$. چون $IL = \circ$ و $TK \subseteq L$، لذا $ITK = \circ$. چون $IT \subseteq I$ لذا $L = r_R(I) = r_R(IT)$. بنابراین $L \subseteq C$. چون $B = \ell_R(CI) \subseteq \ell_R(I)$، بنابراین $L \subseteq B$. اما $B = \ell_R(CI)$، لذا $BC \subseteq \ell_R(I) = L$.

چون I و J در α—ایده آل هستند لذا C یک α—ایده آل پوچساز است. همچنین B یک α—ایده آل پوچساز است. چون $ITK=\circ$ و $CIT=\circ$، لذا $K\subseteq C$ و $T\subseteq B$. چون T و K اکیداً شامل L هستند لذا α—ایده آلهای پوچساز B و C اکیداً شامل L بوده بطوری که $BC\subseteq L$. بنابه انتخاب L، ایده آلهای B و C هرکدام شامل حاصلضربی از ایده آلهای α—اول پوچساز هستند. بنابراین L نیز شامل حاصلضربی از ایده آلهای α—اول پوچساز است. درنتیجه هر α—ایده آل پوچساز از حلقه R شامل حاصلضربی از ایده آلهای α—اول پوچساز است. چون ایده آل صفر حلقه R یک α—اید آل پوچساز است لذا ایده آلهای α—اول پوچساز P_1، P_2، .....،P_n از حلقه R وجود دارند بطوری که $P_1P_2\cdots P_n=\circ$. درنتیجه $(P_1P_2\cdots P_n)^n=\circ$. چون R یک حلقه نیم اول است لذا $P_1\cap\cdots\cap P_n=\circ$. حال فرض کنیم P یک ایده آل α—اول مینیمال از حلقه R باشد. درنتیجه $P_1\cdots P_n=\circ\subseteq P$. بنابراین i ای وجود دارد بطوری که $1\leq i\leq n$ و $P_i\subseteq P$. درنتیجه $P=P_i$.

بعکس، فرض کنیم P یک ایده آل α—اول پوچساز از حلقه R باشد. فرض کنیم P' یک ایده آل α—اول از حلقه R باشد بطوری که $P'\subseteq P$. فرض کنیم $r_R(P)\subseteq P'$. درنتیجه $r_R(P)\subseteq P$ بوده و لذا $(r_R(P))^2=\circ$. چون R یک حلقه نیم اول است لذا $r_R(P)=\circ$. اما P یک ایده آل α—اول پوچساز است و این اتفاق نمی افتد. بنابراین $r_R(P)\not\subseteq P'$. درنتیجه $Pr_R(P)\subseteq P'=\circ$ بوده و لذا $P\subseteq P'$. بنابراین $P=P'$.

قضیه ۲.۲.۱ [۳] فرض کنیم R یک حلقه نیم اول گلدی چپ باشد و $\alpha:R\to R$ یک منومورفیسم و $\delta:R\to R$ یک تابع α—مشتق باشد. دراینصورت حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ نیم اول و گلدی چپ است.

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه نیم اول گلدی چپ باشد و $\alpha : R \to R$ یک منومورفیسم و $\delta : R \to R$ یک تابع α—مشتق باشد. دراینصورت حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ نیم اولیه و گلدی چپ است.

اثبات : بنابه قضیه قبل حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ نیم اول و گلدی چپ است. بنابه قضیه ۱.۲.۱ حلقه R تعداد متناهی ایده آل α—اول مینیمال مانند P_1، P_2، ....،P_n دارد بطوری که $P_1 \cap \cdots \cap P_n = 0$. فرض کنیم $C = C_R(0)$. بنابه قضایای گلدی [۱۲، قضیه ۲.۳.۶] حلقه کسرهای R $(Q = C^{-1}R)$ نیم ساده آرتینی است. بنابه [۸، گزاره ۲.۴]، $\alpha^{-1}(C_R(0)) = C_R(0)$. توابع α و δ را روی Q به صورت زیر توسیع می دهیم:

برای هر $c \in C_R(0)$ و هر $r \in R$، $\tilde{\alpha}(c^{-1}r) = \alpha(c)^{-1}\alpha(r)$ و

$\tilde{\delta}(c^{-1}r) = \alpha(c)^{-1}\delta(r) - \alpha(c)^{-1}\delta(c)c^{-1}r$. حال روش اثبات قضیه ۲.۱ از مقاله [۳] را برای حالتی که α لزوماً پوشا نیست توسیع می دهیم. بنابه [۱۲، گزاره ۲.۱.۱۶]، برای هر $1 \le i \le n$، QP_i یک ایده آل از Q است. بنابه [۱۱] برای هر $1 \le i \le n$، عنصر خوتوان مرکزی $e_i \in Q$ وجود دارد بطوری که $QP_i = Qe_i$. برای هر $1 \le i \le n$، e_i عضو خنثی Qe_i است. فرض کنیم $c^{-1}a \in C^{-1}P_i$ بطوری که $c \in C_R(0)$ و $a \in P_i$. چون $\alpha^{-1}(P_i) = P_i$ و $\alpha^{-1}(C_R(0)) = C_R(0)$، لذا $\tilde{\alpha}(c^{-1}a) = \alpha(c)^{-1}\alpha(a) \in C^{-1}P_i$. فرض کنیم $e_i = f_1 + \cdots + f_k$ بطوری که هر f_i یک خوتوان متعامد اولیه است و $k = u.dimQe_i$. درنتیجه $\tilde{\alpha}(e_i) = \tilde{\alpha}(f_1) + \cdots + \tilde{\alpha}(f_k)$ و هر $\tilde{\alpha}(f_i)$ یک خودتوان متعامد ناصفر است. بنابراین $u.dimQ\tilde{\alpha}(e_i)$ حداقل k می باشد. اما این Q—مدولها زیر مجموعه ای از Qe_i بوده و درنتیجه $Qe_i = Q\tilde{\alpha}(e_i)$. درنتیجه برای هر i، $\tilde{\alpha}(e_i) = e_i$. همچنین $\tilde{\delta}(e_i) = \tilde{\delta}(e_i^2) = \tilde{\delta}(e_i)e_i + \tilde{\alpha}(e_i)\tilde{\delta}(e_i) = 2e_i\tilde{\delta}(e_i)$.

درنتیجه $e_i\widetilde{\delta}(e_i) = ۲e_i^۲\widetilde{\delta}(e_i) = ۲e_i\widetilde{\delta}(e_i)$ بوده و لذا $e_i\widetilde{\delta}(e_i) = ۰$. بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\widetilde{\delta}(e_i) = ۲e_i\widetilde{\delta}(e_i) = ۰$. درنتیجه برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\widetilde{\delta}(C^{-۱}P_i) = \widetilde{\delta}(QP_i) = \widetilde{\delta}(Qe_i) \subseteq C^{-۱}P_i$ و $\delta(P_i) \subseteq C^{-۱}P_i \cap R = P_i$. بنابراین برای هر $i \leq i \leq n$، $\alpha^{-۱}(P_i) = P_i$ و $\delta(P_i) \subseteq P_i$. درنتیجه $P_iR[x;\alpha,\delta]$ یک ایده آل حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ است. حال اگر $\overline{\alpha_i}$ منومورفیسم القاء شده روی $\frac{R}{P_i}$ و $\overline{\delta_i}$ تابع $\overline{\alpha_i}$—مشتق القاء شده روی $\frac{R}{P_i}$ باشد آنگاه $\frac{R[x;\alpha,\delta]}{P_iR[x;\alpha,\delta]} \cong \frac{R}{P_i}[x;\alpha,\delta]$. چون حلقه R نیم اول است و برای هر $۱ \leq i \leq n$، P_i پوچساز یک ایده آل است لذا بنا به [۱۲، گزاره ۲.۲.۱۴] P_i با اشتراک تعدادی از ایده آلهای اول حلقه R برابر است و درنتیجه هر P_i نیم اول است. درنتیجه بنابه [۱۲، گزاره ۳.۲.۵] برای هر $۱ \leq i \leq n$، حلقه $\frac{R}{P_i}$ گلدی چپ است. بنابراین برای هر $۱ \leq i \leq n$، حلقه $\frac{R}{P_i}$ α—اول و نیم اول گلدی چپ است. حال کافی است نتیجه را برای حالتی که R یک حلقه α—اول و گلدی چپ باشد ثابت کنیم. برای این منظور کافی است نشان دهیم برای هر $۱ \leq i \leq n$، $P_iR[x;\alpha,\delta]$ یک ایده آل نیم اولیه از حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ است. زیرا اشتراک این ایده آلها صفر بوده و لذا حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ نیم اولیه است. فرض کنیم J رادیکال جیکبسون حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ باشد. برای هر $n \geq ۰$، فرض کنیم

$\Gamma_n(J) = \{a \in R|$ باشد n با درجه J ضریب پیشرو یک چندجمله‌ای از $a\} \cup \{۰\}$. درنتیجه $\Gamma_n(J)$ یک ایده آل از حلقه R است و $\Gamma_۰(J) \subseteq \Gamma_۱(J) \subseteq \cdots$ و $\alpha(\Gamma_n(J)) \subseteq \Gamma_{n+۱}(J)$ چون $u.dim_R R < \infty$، لذا بنابه [۷، نتیجه ۴.۱۷]، عدد طبیعی n وجود دارد بقسمی که برای هر $i \geq n$، $u.dim_R(\Gamma_i(J)) = u.dim_R(\Gamma_n(J))$. درنتیجه برای هر $i \geq n$، $_R(\Gamma_n(J))$ یک زیر مدول اساسی از $_R(\Gamma_i(J))$ است. فرض کنیم $G = \cup_{n\geq ۰}\Gamma_n(J)$ و $\Delta = \Delta(G) = \cup_{i\geq ۰}x^{-i}Gx^i$. درنتیجه G یک α—ایده آل چپ از حلقه R است و Δ یک α—ایده آل چپ از حلقه A است. حال نشان می دهیم هر عنصر از Δ یک مقسوم

علیه صفر است. فرض کنیم $x^{-i}ax^i \in \Delta$ و $a \in \Gamma_q(J)$ بطوری که $i \geq \circ$ و $q \geq \circ$.
درنتیجه چند جمله ایهای $f(x) = \sum_{t=\circ}^{q} a_t x^t \in J$ و $g(x) = \sum_{k=\circ}^{\ell} b_k x^k \in R[x;\alpha]$ وجود دارند بطوری که $a_q = a$ و $b_\ell \neq \circ$ و $(1 + f(x))g(x) = 1$. با مقایسه ضرایب پیشرو در این تساوی، نتیجه می گیریم $a\alpha^q(b_\ell) = \circ$. بنابراین $x^{-i}ax^i$ یک مقسوم علیه صفر است. چون بنابه [۱۰، نتیجه ۷.۵] حلقه A نیم اول گلدی چپ است لذا Δ نمی تواند یک ایده آل چپ اساسی حلقه A باشد. بنابراین G شامل هیچ عنصر منظمی نیست. حال نشان می دهیم ΔA یک ایده آل چپ اساسی حلقه A نیست. درغیر اینصورت، فرض کنیم ΔA یک ایده آل چپ اساسی حلقه A باشد. درنتیجه عناصر $x^{-d}cx^d \in C_A(\circ)$ و $\circ \neq a_1, a_2, \cdots, a_m \in G$ و $\circ \neq r_1, r_2, \cdots, r_m \in R$ و اعداد صحیح نامنفی $t_1, t_2, \cdots, t_m, k_1, k_2, \cdots, k_m$ وجود دارند بطوری که $x^{-d}cx^d = (x^{-t_1}a_1x^{t_1})(x^{-k_1}r_1x^{k_1}) + \cdots + (x^{-t_m}a_mx^{t_m})(x^{-k_m}r_mx^{k_m})$. فرض کنیم $s = t_1 + \cdots + t_m + k_1 + \cdots + k_m$. درنتیجه $\alpha^{d+s-t_1}(a_1)\alpha^{d+s-k_1}(r_1) + \cdots + \alpha^{d+s-t_m}(a_m)\alpha^{d+s-k_m}(r_m) = \alpha^s(c)$. عدد طبیعی $k \geq n$ وجود دارد بطوری که برای هر $1 \leq i \leq m$، $\alpha^{d+s-t_i}(a_i) \in \Gamma_k(J)$. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq m$، $\alpha^{n+d+s-t_i}(a_i) \in \Delta_{k+n}(J)$. چون $_R(\Delta_n(J))$ در $_R(\Delta_{k+n}(J))$ اساسی است لذا $c' \in C_R(\circ)$ وجود دارد بطوری که برای هر $i \geq \circ$، $c'\alpha^{n+d+s-t_i}(a_i) \in \Delta_n(J)$. درنتیجه

$$c'\alpha^{n+d+s-t_1}(a_1)\alpha^{n+d+s-k_1}(r_1) + \cdots + c'\alpha^{n+d+s-t_m}(a_m)\alpha^{n+d+s-k_m}(r_m) = c'\alpha^{n+s}(c) \in \Delta_n(J).$$

بنابه [۸]، $\Delta_n(J)\alpha^n(R) \subseteq \Delta_n(J)$ و $c'\alpha^{n+s}(c) \in C_R(\circ)$ بوده و لذا $\Delta_n(J) \cap C_R(\circ) \neq \phi$. بنابراین بنابه [۷، گزاره ۵.۹]، $_R(\Delta_n(J))$ در $_RR$ اساسی بوده و لذا $_RG$ در $_RR$ اساسی است. این با فرض $G \cap C_R(\circ) \neq \phi$ در تناقض است. چون A یک حلقه نیم

اول گلدی چپ است لذا ایده آل چپ ناصفر K از حلقه A وجود دارد بطوری که $\circ = K \cap \Delta A \supseteq (\Delta A)K$. چون α یک اتومورفیسم روی A است و اشتراک ایده آلهای اول مینیمال حلقه A صفر است و $K \neq \circ$، لذا بعضی ایده آلهای اول مینیمال A شامل ΔA هستند. همچنین، چون A یک حلقه α—اول است لذا α یک جایگشت روی ایده آلهای اول مینیمال A می باشد. درنتیجه $\Delta A = \circ$ بوده و لذا $J = \circ$. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$، $P_iR[x;\alpha,\delta]$ یک ایده آل نیم اولیه از حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ است. چون اشتراک این ایده آلها صفر است لذا $R[x;\alpha,\delta]$ نیم اولیه است.

کتاب‌نامه

[1] S.A. Amitsur, radicals of polynomial rings, *Canad. J. Math. 8 (1956), 355-361.*

[2] S.S. Bedi and J. Ram, Jacobson radical of skew polynomial rings and group rings, *Israel J. Math. 35 (1980) 327-338.*

[3] A. D. Bell, When are all prime ideals in an ore extension Goldie? *Comm. Algebra 13(8) (1985) 1743-1762.*

[4] G. Cauchon and J. C. Robson, Endomorphisms, derivations and polynomial rings, *J. Algebra 53 (1978) 227-238.*

[5] A. El Ahmar, Sur la Noetherianite des anneare de polynomes de ore *Comm. Algebra 7(18) (1979), 1915-1931.*

[6] A. W. Goldie and G. Michler, Ore extension and polycyclic qroup rings,*J. London Math. Soc. 9(2) (1974) 337-345.*

[7] K. R. Goodearl, R. B. Warfield, An introduction to noncommutative Notherian rings, *cambrigde University Press, Cambridge (1989).*

[8] A. jategaonkar, Skew polynomia rings over orders in Artinian rings, *J. Algebra 21 (1972) 51-59.*

[9] C. R. Jordan and D. A. Jordan, A note on semiprimitivity of ore extensions, *Comm. Algebra 4 (1976) 647-656.*

[10] D. A. Jordan, Bijective extensions of injective ring endomorphisms, *J. London Math. Soc. 25(2) (1982) 435-448.*

[11] T. Y. Lam, A first course in noncommutative rings, *Springer-Verlag: new Yourk, (1990).*

[12] J. C. McConnell and J.C. Robson, Noncommutative Notherian rings, *John Wiley Sons: Chichester, (1987).*

[13] J. Ram, On the semiprimitivity of skew polynomial rings, *Amer. math. Soc. 90(3) (1984) 347-351.*