دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گزارش نهایی طرح پژوهشی

عنوان

تعمیم مجموعه مندلبرات نوع E_d برای اعداد هم مختلط

مجری :

احمد زیره

کد طرح : ۲۳۰۱۷

۲۷

۱۳۸۷

گزارش نهایی طرح پژوهشی

کد: ۲۳۰۱۷

۲۳۲۷

عنوان:

تعمیم مجموعه مندلبرات نوع E_d برای اعداد هم مختلط

مجری :

احمد زیره

دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی شاهرود

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ‌های تصویب و

خاتمه آن به ترتیب ۸۷/۳/۵ و ۸۷/۹/۳ می‌باشد

فهرست

چکیده

در این گزارش،مجموعه مندلبرات چندجمله‌ایها نوع E_d را بررسی می‌کنیم. در حالت کلی از سال ۱۹۸۲ یک مسئله باز به این صورت مطرح بود که؛

حدس :[۸] مجموعهٔ مندلبرات چند جمله‌ایهای درجه دوم موضعا همبند است .

در این گزارش مجموعهٔ مندلبرات چند جمله‌ایها نوع E_d را مطالعه کرده ایم. همچنین ثابت کردیم که مجموعهٔ مندلبرات چند جمله‌ایها نوع E_d برای اعداد هم مختلط یک مجموعه همبند است.

فصل ۱

پیشنیازها

دراین گزارش ما خلاصه‌ای از تعاریف و قضایای سیستم دینامیک چندجمله‌ای مختلط را بیان میکنیم.

۱—۱ نماد گذاری

میدان اعداد مختلط با نماد$\mathbb{C}$ نمایش داده می شود. فشردهٔ شده تک نقطه ای صفحه مختلط نیزکه همان کرهٔ ریمان می باشد با نماد $\hat{\mathbb{C}}$ نمایانده می شود. منظور از یک دامنهٔ D یک زیر مجموعهٔ باز و همبند از $\mathbb{C}$ می باشد.

برای نگاشت تحلیلی $f : D \to D$، n—امین تناوب آنرا با نماد $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \circ f$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱—۱.۱ یک خانواده از توابع تحلیلی را که بر دامنهٔ مشترک D تعریف شده‌اند، را یک خانوادهٔ نرمال می گوییم، اگر هر دنباله در این خانواده دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا باشد.

در این تعریف، منظور از همگرایی، همگرایی یکنواخت روی بخشهای فشرده است.

لم ۱—۲.۱ (محک منتل)[۱۱]اگر نقاط a, b, c از کرهٔ $\hat{\mathbb{C}}$ دو به دو متمایز باشند آنگاه هر خانوادهٔ توابع تحلیلی از دامنهٔ دلخواه D به $\hat{\mathbb{C}} - \{a, b, c\}$ یک خانوادهٔ نرمال می باشد.

تعریف ۱—۳.۱ فرض کنیم که $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک نگاشت تحلیلی و غیر ثابت باشد. نقطهٔ $z_\circ \in \mathbf{C}$ را در نظر می‌گیریم. اگر همسایگی U حول نقطهٔ $z_\circ$ بگونه‌ای موجود باشد، که دنبالهٔ تکرارهای $\{f^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ در دامنهٔ U یک خانوادهٔ نرمال بوجود آورد، آنگاه $z_\circ$ را یک نقطهٔ منظم می‌نامیم. مجموعهٔ نقاطی که به این معنی منظم باشند را مجموعهٔ فاتو می‌نامیم. مجموعه ژولیا که آن را با $J(f)$ نمایش می دهیم متمم مجموعهٔ فاتو در $\mathbf{C}$ است.

با استفاده از تعریف فوق، مجموعهٔ فاتو یک مجموعهٔ باز و بنا بر این مجموعهٔ ژولیا یک مجموعهٔ بسته می باشد.

به عنوان یک مثال ساده، چند جمله ای درجه دوم $P(z) = z^۲$ را در نظر بگیرید. قرص باز $D = \{z \in \mathbf{C}; |z| < ۱\}$ زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ فاتو می باشد چون تکرارهای $\{P^n(z)\}_{n\in\mathbf{N}}$ بر هر زیر مجموعهٔ فشرده از قرص D همگرای یکنواخت به صفر است.

به طور مشابه، خارج قرص، یعنی $\mathbf{C} - \overline{D}$ نیز زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ فاتو می باشد، زیرا تکرارهای $\{P^n(z)\}_{n\in N}$ همگرا به تابع ثابت بی نهایت می باشد. از طرف دیگر، اگر $z_\circ \in \partial D$، آنگاه در هر همسایگی $z_\circ$ موقع گذشتن از مرزقرص، تابع حدی تکرارهای $\{P^n(z)\}_{n\in N}$ دارای یک پرش ناپیوسته می باشد. پس ∂D همان مجموعهٔ ژولیا تابع $P(z)$ می باشد.

تعریف ۱—۴.۱ فرض کنیم که $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ تحلیلی باشد.**مداربزرگ نقطهٔ** z که با $Go(z)$ نمایش می دهیم، عبارت است از تمام نقاط $z' \in \mathbf{C}$، به طوری که اعداد $n \geq \circ$ و $m \geq \circ$ موجود باشند که در برابری $f^m(z) = f^n(z')$ صدق کنند.

۱—۲ خواص مجموعهٔ ژولیا

در این بخش به بعضی قضایا و خواص مجموعهٔ ژولیای تابع تحلیلی f اشاره می کنیم.

لم ۱—۱.۲ [۱۰] مجموعهٔ ژولیای $J(f)$ تحت نگاشت f کاملاً ناوردا می باشد. یعنی اگر $z \in J(f)$، آنگاه مدار $Go(z)$ زیر مجموعهٔ $J(f)$ می باشد.

مجموعهٔ فاتو نیز تحت f کاملاً ناوردا است.

لم ۱—۲.۲ [۱۰] برای هر عدد طبیعی $n \geq ۱$، مجموعهٔ ژولیای f^n، با مجموعهٔ ژولیای f برابراست. به عبارت دیگر، $J(f^n) = J(f)$.

اکنون یک مدار متناوب در نظر بگیرید، به صورت

$$z_۰ \to z_۱ \to \cdots \to z_{n-۱} \to z_n = z_۰.$$

اگر نقاط $z_۱, \cdots, z_n$ نقاط مجزایی باشند، عدد صحیح $n \geq ۱$ را دورهٔ تناوب این مدار می نامیم. مقدار مشتق f را برای این مدار متناوب بصورت زیر

$$\lambda = (f^n)'(z_i) = f'(z_۱).f'(z_۲)\cdots f'(z_n)$$

تعریف می کنیم و آنرا مضرب یا مقدار ویژه این مدار متناوب می نامیم.

تعریف ۱—۳.۲ یک مدار متناوب راجاذب ،دافع و یابی تفاوت می‌نامیم، اگر مضرب آن به ترتیب $|\lambda| < ۱$، $|\lambda| > ۱$، $|\lambda| = ۱$ باشد.

در حالتی که مدار متناوب جاذب باشد حوزهٔ جذب را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱—۴.۲ فرض کنیم که $(z_i)_{i=۱}^n$ یک مدار متناوب وجاذب باشد. مجموعه باز U راحوزهٔ جذب مدار متناوب گوییم، اگر به ازای هر نقطه $z \in U$ تناوبهای $f^n(z), f^{۲n}(z), f^{۳n}(z), \cdots$ همگرا به نقاط مدار $(z_i)_{i=۱}^n$ باشند.

قضیه ۱—۵.۲ [۱۰] هر مدار متناوب جاذب به مجموعهٔ فاتو تعلق دارد. در حقیقت، حوزهٔ جذب مدار متناوب جاذب زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ فاتو است، و هر مدار متناوب دافع به مجموعهٔ ژولیا تعلق دارد.

اثبات. نقطهٔ ثابت $z_\circ = f(z_\circ)$ را در نظر می گیریم. بسط تیلور f را در همسایگی نقطه $z_\circ$ در نظر بگیریم. اگر $z_\circ$ نقطهٔ جاذب باشدآنگاه تناوبهای f حول $z_\circ$ همگرای یکنواخت به تابع ثابت $z_\circ$ می باشد و این همگرایی برای هر زیر مجموعهٔ فشرده از حوزهٔ جذب نقطهٔ $z_\circ$ برقرار است. پس $z_\circ$ و حوزهٔ جذب آن متعلق به مجموعهٔ فاتو می باشند. اگر $z_\circ$ نقطه ثابت دافع باشد، هیچ زیر دنباله ای از تناوبهای $\{f^n\}_{n\in N}$ حول $z_\circ$ همگرا نمی باشد. چون مضارب $\lambda^n = (f^n)'(z_\circ)$ واگرا می باشد. ■

تعریف ۱—۶.۲ نقطهٔ متناوب $z_\circ$ راسهموی گوییم اگر $\lambda = ۱$ یعنی مضرب آن برابر یک باشد و هیچ تناوب f^n برابر با نگاشت همانی نباشد.

لم ۱—۷.۲ [۱۰] هر نقطهٔ متناوب سهموی به مجموعهٔ $J(f)$ تعلق دارد.

اثبات. بدون از دست دادن کلیت ، فرض کنیم که مبدا $z = \circ$ نقطهٔ متناوب سهموی f با دورهٔ تناوب $m \geq ۱$ باشد. آنگاه بسط سری تیلور $f^m(z)$ حول نقطهٔ $z = \circ$ چنین است:

$$f^m(z) = z + a_k z^k + a_{k+۱} z^{k+۱} + \cdots \quad , k \geq ۲, a_k \neq \circ.$$

در نتیجه $f^{mp}(z)$ به صورت سری توانی

$$f^{mp}(z) = z + pa_k z^k + \cdots$$

است پس مقدار مشتق k-ام $f^{mp}(z)$ در مبدا برابر $\frac{d^k(f^{mp})}{dz^k}(\circ) = pa_k$ می باشد که با تغییرات p واگرا می باشد، یعنی تناوبهای $\{f^n(z)\}_{n\in N}$ دارای هیچ زیر دنبالهٔ همگرا نیست. پس $z = \circ$ متعلق به $J(f)$ است. ■

لم ۱—۸.۲ [۱۰] فرض کنیم که $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک نگاشت گویا از درجهٔ دو یا بیشترباشد. آنگاه مجموعهٔ ژولیای آن $J(f)$ ناتهی است.

قضیه ۱—۹.۲ [۱۰] اگر $z_\circ \in J(f)$، آنگاه مجموعهٔ تصویر معکوس تکرارها، یعنی

$$\{z \in C; \quad f^n(z) = z_\circ, n \geq ۱ \text{ برای بعضی } \}$$

در $J(f)$ چگال است.

۱—۳ چندجمله‌ایها

فرض کنیم $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ $d \geq ۲$ باشد، یعنی

$f(z) = a_d z^d + a_{d-۱} z^{d-۱} + \cdots + a_۱ z + a_\circ$ که $a_d \neq \circ$.

آنگاه بی نهایت یک نقطه ثابت جاذب چندجمله‌ای f می‌باشد. درحالت خاص مقدار ثابت $R > \circ$ موجود است به‌طوری که هر نقطهٔ z که $R < |z|$ متعلق به حوزهٔ جذب بی نهایت می باشد. حوزهٔ جذب بی نهایت را با نماد $A(\infty)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱—۱.۳ فرض کنیم $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک چند جمله‌ای از درجه حداقل ۲ باشد .آنگاه متمم حوزهٔ جذب بی‌نهایت رامجموعهٔ کامل ژولیا می نامیم و با نماد$K(f)$ نمایش میدهیم پس $K(f) = \mathbf{C} - A(\infty)$. مجموعهٔ $K(f)$ شامل نقاطی می باشد که مدار آنها کراندار است.

لم ۱—۲.۳ [۱۰] مجموعهٔ کامل ژولیا $K(f)$ یک مجموعهٔ فشرده است و شامل مجموعهٔ $J(f)$ وتمام مولفه های کراندار $\mathbf{C}-J(f)$ می باشد. تمام مولفه های کراندار $\mathbf{C}-J(f)$ همبند ساده می باشند و $J(f)=\partial K(f)$.

قضیهٔ زیر، رفتار چند جمله‌ای f را نزدیک نقطهٔ ثابتِ بی نهایت توصیف می کند.

قضیه ۱—۳.۳ [۱۱] (بوچر) فرض کنیم $f(z)=z^d+a_{d-1}z^{d-1}+\cdots+a_1z+a_0$ یک چند جمله‌ای از درجه $d\geq 2$ باشد آنگاه مقدار $R>0$ و نگاشت همدیس $\phi: V=\{z\in\mathbf{C}; |z|>R\}\to\mathbf{C}$ موجود است به‌طوری که رابطهٔ مزدوج $\forall z\in V, \phi\circ f(z)=(\phi(z))^d$ برقرار می باشد.

در حالت کلی تابع همدیس بوچر نمی تواند به‌طور تحلیلی به کل حوزه‌جذب $A(\infty)$ گسترش یابد. امایک گسترش توسط تابع گرین زیر موجود است.

تعریف ۱—۴.۳ تابع همساز $G(z)=\log|\phi(z)|$ که با روش زیر قابل گسترش به کل $\mathbf{C}$ می باشد راتابع گرین $K(f)$ می گوییم، در اینجا $K(f)$ مجموعهٔ‌کامل ژولیای f و ϕ تابع بوچر f می باشد.

با توجه به رابطهٔ $\phi\circ f(z)=(\phi(z))^d$ داریم $G(z)=\frac{G(f(z))}{d}$.

حال دامنهٔ جاذب بی نهایت یعنی مجموعهٔ $A(\infty)=\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(V)$ را در نظرمی گیریم. به ازای هر نقطه $z\in f^{-n}(V)$ با قرار دادن $G(z)=\frac{G(f^n(z))}{d^n}$ تابع $G(z)$ قابل گسترش به کل $A(\infty)$ می باشد. حال به ازای هر نقطه $z\in K(f)$ قرار می دهیم $G(z)=0$. آنگاه تابع $G:\mathbf{C}\to R^+$ یک تابع زیر همساز بر کل $\mathbf{C}$ می باشد. تابع G را تابعِ گرینِ مجموعهٔ کامل ژولیای $K(f)$ می گوییم.

قضیهٔ زیر تاثیر نقاط بحرانی چند جمله‌ای $f(z)$ را بر ساختار توپولوژیکی مجموعهٔ ژولیای $J(f)$ توصیف می کند.

قضیه ۱—۵.۳ [۱] فرض کنیم f یک چند جمله‌ای از درجه $d\geq 2$ باشد. اگر مجموعهٔ کامل ژولیای $K(f)$ شامل نقاط بحرانی f باشد آنگاه مجموعه های $K(f)$و $J(f)$ همبند می باشند. در غیر این

صورت اگر حداقل یک نقطه بحرانی در حوزهٔ جذب $A(\infty)$ قرار بگیرد آنگاه مجموعه های $K(f)$و$J(f)$ کاملا ناهمبند می باشند.

در حالتی که $K(f)$ همبند باشد تابع بوچر یک گسترش تحلیلی به نگاشت همدیس $\phi : \mathbf{C} - K \to \mathbf{C} - \overline{D}$ دارد کهD قرص واحد حول مبدا می باشد.

فرض کنیم که مجموعهٔ $K(f)$ همبند باشد. دراین صورت تابعِ همدیسِ $\phi : \mathbf{C} - K \to \mathbf{C} - \overline{D}$ موجود است. تابع وارونِ ϕ را باψ نمایش می دهیم. پس $\psi : \mathbf{C} - \overline{D} \to \mathbf{C} - K$ همدیس می باشد.

سوال اساسی بررسيِ شرایطی می باشد که تحت آنها نگاشت ψ دارای یک گسترش پیوسته برمرز $\partial\overline{D}$ باشد.

قضیهٔ کاراتئودوری:[۱۰] وارونِ نگاشتِ ریمانِ $\psi : \mathbf{C} - \overline{D} \to \mathbf{C} - K$ به‌طورپیوسته به نگاشتی از $\mathbf{C} - D$ به‌روی $\mathbf{C} - int(K)$ قابل گسترش است اگر و تنها اگر مرز ∂K موضعاً همبند باشد.

بااستفاده از قضیهٔ کاراتئودوری نتیجهٔ زیر به‌دست می آید.

قضیه ۱—۶.۳ [۱۰] فرض کنیم $f(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $d \geq 2$ باشد. آنگاه شرایط زیر با هم معادل می باشند:

- مجموعهٔ $J(f)$ موضعاً همبند است،
- مجموعهٔ $K(f)$ موضعاً همبند است،
- مجموعهٔ $K(f)$ همبند است و نگاشت همدیس $\psi : \mathbf{C} - \overline{D} \to \mathbf{C} - K$ دارای گسترش پیوسته بر مرز $\overline{D}$ می باشد و$f(\psi(w)) = \psi(w^d)$.

با توجه به قضیهٔ فوق، موضعاً همبندیِ مجموعهٔ $J(f)$ بستگی به رفتارتابع ψ بر دایرهٔ واحد دارد. تکنیک شعاع خارجی، که ذیلاً آن را بررسی می کنیم، کمک فراوانی به فهمیدن موضعاً همبندیِ $J(f)$ می کند.

تعریف ۱—۷.۳ فرض می کنیم $K(f)$ همبند باشد و $\psi : \mathbf{C} - \overline{D} \to \mathbf{C} - K$ تابع وارون بوچر باشد. تصویرِ شعاعِ $\{re^{2\pi it}; r > 1\}$ تحتِ نگاشتِ ψ ، یعنی $R_t = \psi\{re^{2\pi it}; r > 1\}$ را شعاع خارجی با زاویهٔ t در دامنهٔ $\mathbf{C} - K$ می نامیم.

با استفاده از رابطهٔ $f(\psi(w^d)) = \psi(w^d)$ به‌وضوح داریم $f(R_t) = R_{dt}$، یعنی شعاع خارجی با زاویهٔ t تحت نگاشت f به شعاع خارجی با زاویهٔ dt تبدیل می‌شود که d درجهٔ f است. در حالتِ خاص، اگر $t = \frac{m}{d-1}$ آنگاه $f(R_t) = R_t$ برای $m = 1, 2, \cdots, d-1$.

تعریف ۱—۸.۳ اگر برای شعاع خارجی $R_t = \psi\{re^{2\pi it}; r > 1\}$ مقدار حد $\lim_{r \to 1} \psi(re^{2\pi it})$ موجود و برابر z_t باشد، می گوییم که شعاع خارجی R_t در نقطهٔ z_t می‌نشیند، در این حالت $z_t \in J(f)$.

اگر مجموعهٔ $J(f)$ موضعاً همبند باشد، آنگاه بنابرویژگیهای پیوستگی مطرح شده در قضیهٔ ۱—۶.۳، هر شعاع خارجی به نقطه‌ای از مجموعهٔ ژولیا همگرا می شود.

تعریف ۱—۹.۳ شعاع خارجی R_t راگویا نامیم اگر زاویهٔ $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ گویا باشد و R_t رامتناوب گوییم اگر مقدار $n \geq 1$ موجود باشد به طوری که $d^n t \equiv t (mod 1)$.

قضیه ۱—۱۰.۳ (سولیوان ـدووادی و هوبارد[۱۰]) فرض کنیم $K(f)$ همبند باشد. آنگاه هر شعاع خارجی متناوب به نقطهٔ متناوب دافع یا سهموی همگرا می باشد.

عکس قضیهٔ فوق نیز برقرار است.

قضیه ۱—۱۱.۳ (دووادی و یوکوز[۱۰]) فرض کنیم $K(f)$ همبند باشد. آنگاه هر نقطهٔ متناوب دافع یا سهموی، نقطهٔ همگرایی حد اقل یک شعاع خارجیِ متناوب می باشد.

قضیه ۱—۱۲.۳ (سولیوان-دووادی[۱۰]) اگر مجموعهٔ ژولیا $J(f)$ موضعاً همبند باشد، آنگاه هر نقطهٔ متناوبِ $J(f)$ یک نقطهٔ دافع یا سهموی می باشد.

یک زیر مجموعه در فضای چند جمله‌ایها وجود دارد که از ویژگی خاصی برخوردار است، در تعریف زیر آن را توصیف می کنیم.

تعریف ۱—۱۳.۳ فرض کنیم $f(z)$ چند جمله‌ای از درجهٔ $d \geq ۲$ باشد و C_f مجموعهٔ نقاط بحرانی f باشد. چند جمله ای $f(z)$ را هذلولوی نامیم اگر $J(f) \bigcap \overline{C^+(f)} = \emptyset$ که در آن $C^+(f) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} f^n(C_f)$.

با توجه به شرایط نقاط بحرانی در چند جمله‌ای هذلولوی، نتایج جالبی برای این نوع از چند جمله ایها به دست می آید که مهمترین آنها قضیه مهم زیر می باشد.

قضیه ۱—۱۴.۳ [۱۰] اگر چند جمله‌ای $f(z)$ هذلولوی باشد و مجموعهٔ $K(f)$ همبند باشد، آنگاه $K(f)$ موضعا همبند است.

حدس زیر یکی از مهمترین مسائل در سیستم دینامیکی چند جمله‌ایها می‌باشد که با حدس MLC (در بخش ۱—۴) معادل است.

حدس HD[۸] مجموعهٔ چند جمله‌ایهای هذلولوی درجه d در فضای چند جمله‌ایهای درجه d چگال می باشد.

۱—۴ مجموعهٔ مندلبرات

در این بخش به معرفی مجموعهٔ مندلبرات می پردازیم و در فصل دوم، نتایج و قضایای مربوط به مجموعهٔ مندلبرات را به مجموعه مکانِ همبندی (مجموعهٔ مندلبرات) در مورد چند جمله‌ایهای متقارن، تعمیم می دهیم. برای هر چند جمله‌ای درجه دوم $f(z) = az^۲ + bz + d$ یک تبدیل خطی

$L(z) = Az + B$ موجود است به‌گونه‌ای که رابطهٔ مزدوجِ، $L \circ f \circ L^{-1}(z) = z^2 + c$ به‌ازای $c \in \mathbf{C}$ برقرار باشد.

پس، هر چند جمله‌ایِ درجه دوم $f(z)$ متناظر با یک چند جمله‌ای به‌صورت $Q_c(z) = z^2 + c$ می باشد.

اکنون به بررسی چند جمله‌ایهای درجه دوم $Q_c(z) = z^2 + c$ که $c \in \mathbf{C}$ می پردازیم . از آنجا که $Q_c(z) = z^2 + c$ دارای تک نقطهٔ بحرانیِ $z = 0$ است، پس $K(Q_c)$ همبند است اگر وتنها اگر مدار نقطهٔ بحرانی $z = 0$ کراندار باشد. واما، کراندار بودنِ مدار نقطهٔ بحرانی وابسته به انتخاب پارامترc است.

تعریف ۱—۴.۱ (مجموعه‌مندلبرات.) تمام مقادیر پارامتر c را که به ازای آنها مجموعهٔ $K(Q_c)$ همبند می شود، مجموعهٔ مندلبرات می‌نامیم و و آنرا با M نمایش می دهیم. به عبارت دیگر،

$$M = \{c \in \mathbf{C};\ \text{دنبالهٔ } \{Q_c^n(0)\}_{n\in N} \text{ کراندار باشد}\}.$$

قضیه ۱—۴.۲ [۱۳] مجموعهٔ مندلبرات M، یک مجموعهٔ فشرده و زیر مجموعه قرص $\{c \in \mathbf{C}; |c| \leq 2\}$ است. از سوی دیگر، مجموعهٔ $\mathbf{C} - M$ همبند است.

اثبات. قرار میدهیم $q_n(c) = Q_c^n(0)$. از دنبالهٔ توابع $q_n : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ در هر دو بخش قضیه استفاده می‌کنیم. تابع q_n چندجمله‌ای است و در نتیجه می‌توان از ویژگیهای پیوستگی و تحلیلی آن بهره گرفت. اگر

$|c| > ۲$، آنگاه با استقراً روی n به سادگی دیده می‌شود که $|q_n(c)| \geq |c|(|c| - ۱)^{۲^{n-۲}}$ در واقع،

$$|q_۲(c)| = |c^۲ + c| \geq |c|(|c| - ۱) > |c| = |q_۱(c)|;$$

بنابراین با استقرا داریم:

$$|q_{n+۱}(c)| = |(q_n(c))^۲ + c| \geq |q_n(c)|^۲ - |c| \geq$$

$$(|c|(|c| - ۱)^{۲^{n-۲}})^۲ - |c| \geq |c|(|c| - ۱)^{۲^{n-۱}}$$

در نتیجه برای $|c| > ۲$، $\lim_{n\to\infty} |q_n(c) = +\infty$ و دنبالهٔ تکرارهای $\{q_n(c)\}_{n\in N}$ واگرا می باشد و $c \in M$. بنا براین $M \subset \{c \in \mathbf{C}; |c| \leq ۲\}$. بنابراین $c \in M$ اگر وتنها اگر به ازای هر n داشته باشیم $|q_n(c)| \leq ۲$. بنابر پیوستگی q_n، M یک زیر مجموعهٔ بسته از قرص $\{c; |c| \leq ۲\}$ ولذا فشرده می باشد.

برای اثباتِ همبندیِ $\mathbf{C} - M$، ازبرهان خلف استفاده می کنیم. فرض کنیم مجموعهٔ $\mathbf{C} - M$ همبند نباشد. یعنی $\mathbf{C} - M$ حداقل دارای یک مولفه همبند کراندار مانند D است. پس D همبند و کراندار می باشد و به ازای هر نقطهٔ $c \in \partial D$ داریم $c \in M$ لذا $|q_n(c)| \leq ۲$. پس با استفاده‌ازاصل ماکزیمم برای توابع تحلیلی $q_n(c)$ نتیجه می شود که برای هر نقطهٔ $c \in D$ نیز $c \in D; |q_n(c)| \leq ۲$. با توجه به تعریف $q_n(c) = Q_c^n(۰)$ و آنچه قبلاً گفته شد، $D \subset M$. پس $\emptyset \neq D \subset M \cap (\mathbf{C} - M) = \emptyset$ تناقض است.

پس $\mathbf{C} - M$ همبند است. ■

اکنون با ساختن یک تابع گرین بر ناحیهٔ $\mathbf{C} - M$ نشان می دهیم که $\hat{\mathbf{C}} - M$ یک دامنهٔ همبند ساده می باشد و این مطلب نتیجه‌می دهد که M یک مجموعهٔ همبند می باشد.

در بعضی حالات دامنهٔ $G_M = \hat{\mathbf{C}} - M$ مشابه با دامنهٔ جذب $A(\infty)$ می باشد. به‌عنوان مثال، دامنه جذب $A(\infty)$ عبارت بود از مجموعهٔ نقاطی که تحت تناوبهای چند جمله‌ای به بی نهایت همگرا می باشند. به همین نحو ، دامنهٔ G_M مجموعهٔ مقادیر پارامتر c می باشد به طوری که تحت توابع $q_n(c)$ به بی نهایت همگرا می باشد. خاصیت مشابه بعدی وجود تابع گرین برای دامنهٔ G_M می باشد.

لم ۱—۳.۴ [۱۳] برای دامنهٔ G_M تابع گرین $g : G_M \to R^+$ موجود است به طوری که

$$g(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۲^n} \log |Q_c^n(c)|.$$

اثبات. دامنه‌های

$$G_n = \{c \in \mathbb{C}; |Q_c^n(c)| > ۲\}, n \in \mathbb{N}$$

را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف مجموعهٔ مندلبرات داریم

$$G_M = \bigcup_{n\geq ۰} G_n.$$

اکنون با استفاده از اصل ماکزیمم برای توابع تحلیلی $c \to Q_c^m(c)$ در دامنه های G_n، می توانیم نتیجه بگیریم‌که G_nها دامنه های بیکران و همبند می باشند.

حال تابع $g_n(c) = \frac{۱}{۲^n} \log |Q_c^n(c)|$ تابع گرین برای دامنهٔ G_n می باشد. از طرفی توابع g_n به طور موضعی همگرای یکنواخت می باشند . پس تابع حدی $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ یک تابع گرین برای G_M است. نتیجه حاصل است. ■

قضیه ۱—۴.۴ (دووادی ـهوبارد[۱۳]) مجموعهٔ مندلبرات M یک مجموعهٔ همبند می‌باشد.

مشابه قضیهٔ فوق را در فصل دوم برای مجموعهٔ مندلبرات چند جمله‌ایهای متقارن اثبات می کنیم. تکنیک و روش اثبات با کمی تغییر و سازگاری مشابه اثبات قضیهٔ فوق می باشد.

اکنون مجموعهٔ درونی مندلبرات یعنی M° رادر نظر میگیریم. مولفه های M° دامنه های همبند ساده می باشند. یکی از این مولفه ها که شامل مبدا می باشد به شکل قلب است و قلب اصلی نام دارد وشامل تمام مقادیر پارامترc می باشد به طوری که $|۱ - \sqrt{۱ - ۴c}| < ۱$. بنابراین، قلب اصلی تمام چند جمله‌ایهای $Q_c(z) = z^۲ + c$ را معرفی می کند که دارای یک نقطهٔ ثابت جاذب با مضرب برابر با $\lambda(c) = ۱ - \sqrt{۱ - ۴c}$ می باشد.

تعریف ۱—۵.۴ مولفهٔ H ازM° را هذلولی نامیم، اگر به ازای هر $c \in H$، چندجمله‌ای متناظر آن یعنی $Q_c(z) = z^۲ + c$ دارای یک مدار متناوب جاذب باشد.

مثال ۱—۶.۴ قلب اصلی، $\{c \in \mathbb{C}; |۱ - \sqrt{۱ - ۴c}| < ۱\}$، یک مولفه هذلولی می‌باشد. که شامل تمام چندجمله‌ایهای $Q_c(z) = z^۲ + c$ است که یک نقطه ثابت جاذب دارند.

مثال ۱—۷.۴ مولفه $\{c \in \mathbb{C}; |۴c + ۴| < ۱\}$ یک مولفه هذلولی از M° میباشد و مربوط به تمام چند جمله ایهای $Q_c(z) = z^۲ + c$ است که دارای یک دور جاذب با دوره تناوب ۲ هستند.

حدس $HD_۲$.[۸] هر مولفه درونی،M°، یک مولفه هذلولی است.

حدس MLC.[۸] مجموعه مندلبرات،M، موضعا همبند می‌باشد.

فصل ۲

مجموعهٔ مندلبرات نوع E_d برای اعداد هم مختلط

هدف ما در این فصل بررسی مجموعهٔ مکانِ همبندي C_d برای تابع $f_c(z) = z(z^d + c)$ است. خواص مجموعهٔ C_d مشابه با مجموعهٔ مندلبرات M است. در حقیقت C_d تعمیم مجموعه مندلبرات به چندجملهایهای $f_c(z) = z(z^d + c)$ می باشد. برای این منظور، در بخش اول مرور مختصری بر مجموعهٔ مندلبرات داریم و در بخش‌های بعدی، بااستفاده از تعاریف و قضایای تعمیم یافته، این خواص را به مجموعهٔ C_d گسترش می دهیم.

۲—۱ مجموعهٔ مندلبرات

مجموعهٔ مندلبرات، $M_۲$، مکان همبندی چندجمله‌ای درجه دوم $Q_c(z) = z^۲ + c$، $c \in \mathbb{C}$، می باشد. مانند توابع گویا، رفتار دینامیکی نقطهٔ بحرانی $w = ۰$، بر رفتار دینامیکی چندجمله‌ای $Q_c(z)$ تاثیر می گذارد. مجموعهٔ کامل ژولیا$K(Q_c)$ همبند است اگر مدار نقطهٔ بحرانی $w = ۰$ کراندار باشد، و کاملاً ناهمبند است موقعی که این مدار بی کران باشد.

مجموعهٔ مندلبرات، M، مجموعهٔ مقادیری از پارامتر c می‌باشد که $K(Q_c)$ همبند باشد. یا به طور معادل، مجموعهٔ پارامترهایی می‌باشد به طوری که مدار نقطهٔ بحرانی $w = ۰$ کراندار باشد.

کارهای دووادی و هوبارد[۴]، سولیوان[۱۴] و یوکوز[٦]، اکثراً اختصاص به مطالعهٔ مجموعهٔ مندلبرات دارد. در عین حال، مسایل باز زیادی باقی مانده است. مهمترین مساله حدس MLC در مورد موضعاً همبند بودن مجموعهٔ مندلبرات است. نتایج زیر در مورد مجموعه مندلبرات M شناخته شده می باشند:

۱) مجموعهٔ مندلبرات فشرده و همبند می باشد.

۲) درون مجموعهٔ مندلبرات شامل مولفه‌های همبندی می باشد. چندجمله‌ای $Q_c(z) = z^2 + c$ در آن مولفه‌ها دارای مدار متناوب جاذب می باشد، که به آن ها مولفه‌های هذلولوی می گوییم و این حدس موجود است که اجتماع تمام مولفه‌های هذلولوی برابر درون M است.

۳) برای هر مولفهٔ هذلولوی H، یک نگاشت همدیس از قرص واحد به H مانند $\rho_H : D \to H$ موجود است به طوری که به ازای $c = \rho_H(t)$ چندجمله‌ای $Q_c(z) = z^2 + c$ دارای یک مدار متناوب با مضرب t است. این نگاشت قابل گسترش به یک همسانریختی از $\overline{D}$ به $\overline{H}$ می باشد و تابع $\gamma(t) = \gamma_H(t) = \lim_{r\to 1} \rho_H(re^{2\pi it})$ یک پارامتری سازی برای مرز H معرفی می کند.

۴) یکتا مولفه هذلولی H_0 موجود است به طوری که شامل پارامترهای c می باشد که چندجمله‌ای متناظر آن $Q_c(z) = z^2 + c$ دارای نقطهٔ ثابت جاذب است. برای هر زاویهٔ گویای $t = p/q$، مولفهٔ هذلولوی $H_{p/q}$ موجود است که در نقطهٔ $\gamma_{H_0}(p/q)$ به H_0 متصل است.

۵) یکریختی همدیس $\phi_M : \mathbf{C} - M \to \mathbf{C} - \overline{D}$ موجود است به طوری که اگر $c \to \infty$ آنگاه $\frac{\phi_M(c)}{c} \to 1$. شعاع خارجی با زاویهٔ θ عبارت است از مجموعهٔ

$$R_M(\theta) = \phi_M^{-1}(\{re^{2\pi it}; 1 < r < \infty\}).$$

در بررسی همبندي موضعي مجموعهٔ مندلبرات، شعاع های خارجی با زاویهٔ گویا نقش اساسی دارند. در حقیقت اگر θ گویا باشد مقدار حد $\lim_{r\to 1} \phi_M^{-1}(re^{2\pi it})$ به مرز ∂M همگرا می باشد.

فرض کنیم p و q اعداد صحیح مثبتی باشند که‌نسبت به هم اول هستند، $p < q$ و $q \geq 2$.

دو زیرمجموعهٔ مندلبرات را با نمادهای $\text{limb-}M_{p/q}$ و $\text{wake-}WM_{p/q}$ به شرح زیر معرفی می‌کنیم:

$\text{limb-}M_{p/q}$ از مجموعهٔ مندلبرات، عبارت است از مولفهٔ همبند $M - \overline{H_0}$ که در نقطهٔ $c = \gamma_{H_0}(p/q)$ به مولفهٔ H_0 چسبیده است.

$\text{wake-}WM_{p/q}$ از مجموعهٔ مندلبرات M، عبارت است از زیرمجموعهٔ باز در $\mathbf{C}$ که شامل $\text{limb-}M_{p/q}$ است و توسط دو شعاع خارجی که به نقطهٔ $c = \gamma_{H_0}(p/q)$ همگرا هستند احاطه شده باشد.

۲—۲ مجموعهٔ مندلبرات C_d توابع $f_c(z)$

همانند مجموعهٔ مندلبرات M که مکان هندسی همبندی چندجمله‌ای های درجه دوم $Q_c(z) = z^2 + c$ می باشد، مکان هندسی همبندی چندجمله‌ایهای $f_c(z) = z(z^d + c)$ را در نظر می گیریم و با C_d نمایش می‌دهیم. در این بخش مجموعهٔ C_d را با مجموعهٔ مندلبرات M مقایسه می‌کنیم. کوشش ما بر این است که اکثر قضایای مربوط به مجموعهٔ مندلبرات را به مجموعهٔ C_d تعمیم دهیم.

باید توجه شود که اکثر مسایل باز مجموعهٔ مندلبرات، همچنان برای مجموعهٔ C_d به عنوان مساله باز باقی می مانند.

نمادگذاری: برای چند جمله‌ای $f_c(z) = z(z^d + c)$، بینهایت یک نقطه ثابت جاذب می باشد. حوزهٔ جذب آن را با$A_c(\infty)$ نمایش می دهیم، یعنی

$$A_c(\infty) = \{z \in \mathbf{C}; \lim_{n\to\infty} f_c^n(z) = \infty\},$$

و مجموعهٔ کامل ژولیا را برابر با متمم $A_c(\infty)$ می گیریم، یعنی $K_c = \mathbf{C} - A_c(\infty)$ و مجموعه ژولیا را برابر با مرز K_c در نظر می گیریم، یعنی $J_c = \partial K_c$.

۲—۲—۱ چند جمله‌ای متقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$

از فصل اول می دانیم که همبندی مجموعهٔ ژولیای J_c وابسته به نقاط بحرانی$f_c(z)$ می باشد. چند جمله ای متقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$ دارای d نقطهٔ بحرانی متقارن به صورت زیر

$$c_0, c_1 = \omega c_0, \cdots, c_{d-1} = \omega^{d-1} c_0$$

می باشد که $\omega = e^{2\pi i/d}$ و c_0 یکی از جواب های معادلهٔ $\frac{d}{dz} f_c(z) = 0$ می باشد یعنی

$$c_0 = (\frac{-c}{d+1})^{1/d}$$

مقادیر بحرانی نیز دارای تقارن می‌باشند:

$$f_c(c_0), f_c(c_1) = \omega f_c(c_0), \ldots, f_c(c_{d-1}) = \omega^{d-1} f_c(c_0).$$

از فصل اول می دانیم مجموعهٔ ژولیا J_c همبند است اگر و تنها اگر نقاط بحرانی چندجمله‌ای $f_c(z)$ متعلق به $A_c(\infty)$ نباشند. چون نقاط بحرانی و مقادیر بحرانی چندجمله‌ای $f_c(z)$ متقارن می باشند، پس مجموعهٔ J_c همبند است اگر و تنها اگر $c_0 \notin A_c(\infty)$.

حال درفضای پارامتر$\mathbf{C}$، مجموعهٔ مقادیر پارامتر c را در نظرمی گیریم که J_c همبند باشد.

تعریف ۲—۱.۲ مجموعهٔ مندلبرات $f_c(z) = z(z^d + c)$، عبارت است از مجموعهٔ

$$C_d = \{c \in \mathbf{C}; c_0 \notin A_c(\infty)\}.$$

۲—۳ تقارن و فشردگی C_d

دراین بخش به بررسی مجموعهٔ C_d می پردازیم. نخست نشان می دهیم که مجموعهٔ C_d در یک گوی به شعاع $\frac{d+1}{d}\alpha$ قرار دارد. با استفاده از آن، نشان می‌دهیم که C_d فشرده است. بعد از آن مولفه‌های همبند درون C_d را بررسی می کنیم.

گزاره ۲—۳.۱. برای هر $d \geq ۲$ عدد حقیقی α، $۱ < \alpha < ۲$ وجود دارد که

$$C_d = \{c \in C; \quad |f_c^n(c_0)| \leq (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}, \qquad \forall n \in N\}.$$

اثبات. فرض کنیم $|z| > (۱ + |c|)^{۱/d}$، مثلاً $|z|^d = ۱ + |c| + \epsilon$ که $\epsilon > ۰$. آنگاه با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$|f_c(z)| \geq |z|(|z|^d - |c|) \geq (۱ + \epsilon)|z|,$$

و با استقراء خواهیم داشت $|f_c^n(z)| \geq (۱ + \epsilon)^n|z|$. در واقع اگر فرض استقراء را بپذیریم، آنگاه

$$|f_c^n(z)| \geq (۱ + \epsilon)^n|z| \Rightarrow |f_c^n(z)|^d \geq (۱ + \epsilon)^{nd}|z|^d > |z|^d = ۱ + |c| + \epsilon$$

و از آنجا

$$|f_c(f_c^n(z))| \geq (۱ + \epsilon)|f_c^n(z)| \geq (۱ + \epsilon)(۱ + \epsilon)^n|z|.$$

در نتیجه، برای نقاط $|z| > (۱ + |c|)^{۱/d}$، دنبالهٔ تکرارهای $\{f_c^n(z)\}_{n=۱}^{\infty}$ به بی‌نهایت واگرا می باشد. یعنی دامنهٔ $\{z; |z| > (۱ + |c|)^{۱/d}\}$ در حوزهٔ جذب بی نهایت قرار می گیرد،

$$\{z; |z| > (۱ + |c|)^{۱/d}\} \subset A_c(\infty).$$

اکنون چندجمله‌ای حقیقی—مقدار $g: R \to R$ با ضابطهٔ $g(t) = t^{d+1} - (d+1)t - d$ را در نظر می‌گیریم. به ازای $d \geq 2$، چند جمله‌ای $g(t)$ تنها یک ریشهٔ مثبت α دارد، که $1 < \alpha < 2$.

حال اگر مقادیر پارامتر c خارج قرص به شعاع $\frac{d+1}{d}\alpha$ انتخاب شوند، یعنی اگر $|c| > \frac{d+1}{d}\alpha$ آنگاه $\frac{d}{d+1}|c| > \alpha$ و از آنجا $g(\frac{d}{d+1}|c|) > 0$، یعنی $\frac{d^d}{(d+1)^{d+1}}|c|^{d+1} > (1 + |c|)$ و از طرفی مقدار بحرانی $f_c(c_0)$ برابر است با:

$$|f_c(c_0)|^d = \frac{d^d}{(d+1)^{d+1}}|c|^{d+1}.$$

در نتیجه، $|f_c(c_0)| > (1+|c|)^{\frac{1}{d}}$ یعنی $f_c(c_0)$ متعلق به حوزهٔ جذب بی نهایت می باشد، $c_0 \in A_c(\infty)$.

به همین طریق اگر به ازای nای داشته باشیم $|f_c^n(c_0)| > (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}$ آنگاه به شیوهٔ مشابه $c_0 \in A_c(\infty)$.

پس $c \in C_d$ اگروتنهااگر برای هرعدد طبیعی n داشته باشیم $|f_c^n(c_0)| \leq (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}$. ■

نتیجه ۲—۲.۳ مجموعهٔ C_d یک زیر مجموعهٔ فشرده از قرص $\{c; |c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha\}$ می‌باشد.

اثبات. اگر $|c| > \frac{d+1}{d}\alpha$ آنگاه با استفاده از گزاره ۲—۱.۳ نقطهٔ بحرانی c_0 متعلق به $A_c(\infty)$ است. پس، از تعریف C_d نتیجه می شود که $C_d \subset \{c; |c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha\}$. حتی اگر $|c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha$ برقرار باشد، موقعی که برای بعضی از nهاداشته باشیم $|f_c^n(c_0)| > (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}$، آنگاه c_0 متعلق به $A_c(\infty)$ است، یعنی $c \notin C_d$. پس، بنابر دو حالت فوق داریم که $c \in C_d$ اگروتنهااگر به ازای هرعدد طبیعی n داشته باشیم $|f_c^n(c_0)| \leq (1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{1/d}$. پس C_d یک زیرمجموعهٔ بسته در قرص $\{c; |c| \leq \frac{d+1}{d}\alpha\}$ است. ■

گزاره ۲—۳.۳ مجموعهٔ C_d تحت عمل گروه Σ_d ناوردا می باشد.

اثبات. فرض کنیم که $c \in C_d$ و $\omega = e^{2\pi i/d}$ یکی از عناصر گروه Σ_d باشد. نقطهٔ c_0 یک نقطهٔ بحرانی چند جمله‌ای $f_c(z)$ می باشد. در نتیجه، مقدار $\omega^{1/d}c_0$ یک نقطهٔ بحرانی تابع $f_{\omega c}$ می شود. مقادیر

بحرانی دو تابع بدین صورت با هم در ارتباط می باشند:

$$f_{\omega c}(\omega^{1/d}c_0) = \omega^{1/d}c_0(\omega c_0^d + \omega c) = \omega^{\frac{1}{d}+1}c_0(c_0^d + c) = \omega^{\frac{1}{d}+1}f_c(c_0).$$

بنابراین $|f_{\omega c}(\omega^{1/d}c_0)| = |f_c(c_0)|$. از طرف دیگر، با توجه به مقدار α در گزارهٔ ۲—۱.۳، مجموعه C_d تنها وابسته به d می باشد و چون دو چندجمله‌ای f_c و $f_{\omega c}$ هم درجه می‌باشند پس $\omega c \in C_d$. ■

در گزارهٔ زیر مولفه‌های همبندی درون مجموعه C_d بررسی می شوند و همین طور نشان می‌دهیم متمم C_d یک دامنهٔ همبند می‌باشد. برای بررسی همبندی مجموعه C_d نیاز به نتایجی داریم که در بخش بعدی به آن می پردازیم.

گزاره ۲—۴.۳ مجموعهٔ C_d دارای خواص زیر می باشد:

آ) مجموعهٔ C_d شامل قرص واحد بسته $\{c; |c| \leq 1\}$ می باشد،

ب) مولفه های درون C_d، دامنه های همبند ساده می باشند،

ج) مجموعهٔ باز $\mathbb{C} - C_d$، یک مجموعهٔ همبند می باشد.

اثبات.

آ) اگر $|c| < 1$ آنگاه مبدا $z = 0$ یک نقطهٔ ثابت جاذب برای $f_c(z)$ می باشد. پس دامنهٔ جاذب آن باید حداقل یک نقطهٔ بحرانی داشته باشد. با توجه به تقارن نقاط بحرانی، دامنه جاذب مبدا شامل تمام نقاط بحرانی است. یعنی به ازای $|c| < 1$ مجموعهٔ ژولیا J_c همبند است. در حالتی که $|c| = 1$ باشد در این حالت یا مبدا نقطهٔ سهموی می باشد پس نقطهٔ بحرانی به دامنه سهموی آن تعلق دارد و یا مبدا نقطهٔ سهموی نمی‌باشد، پس نقطهٔ بحرانی متعلق به مجموعهٔ ژولیا می باشد. پس در هر حال بنا به تقارن، تمام نقاط بحرانی خارج از حوزهٔ جذب بینهایت قرار می‌گیرند، یعنی به ازای $|c| = 1$ مجموعهٔ ژولیا J_c همبند است یعنی قرص واحد بسته نیز در C_d قرار دارد $\{c; |c| \leq 1\} \subset C_d$.

ب) فرض کنیم که D یکی از مولفه های درون C_d باشد که همبند ساده نیست. حال یکی از مولفه های

متمم D را که کراندار باشد، مثلا X، را در نظر بگیریم. پس X نیز متعلق به $\mathbf{C} - C_d$ می باشد. چون مرز X به مجموعهٔ بستهٔ C_d تعلق دارد، پس به ازای هر نقطه c متعلق به‌مرز X، دنبالهٔ $\{f_c^n(c_\circ)\}$ کراندار می باشد. حال اگر هر نقطهٔ c متعلق به‌درون X را در نظر بگیریم، و اصل ماکزیمم را برای دنبالهٔ $|f_c^n(c_\circ)|$ بکار ببریم، می‌بینیم که مقدار مطلق $|f_c^n(c_\circ)|$ بیشترین مقدار خود را بر مرز می گیرد. از طرفی برمرز X دنبالهٔ $\{f_c^n(c_\circ)\}$ کراندار می باشد و دارای یک کران ثابت $(1 + \frac{d+1}{d}\alpha)^{\frac{1}{d}}$ است. در نقاط درونی X نیز دنبالهٔ $|f_c^n(c_\circ)|$ کمتر از این کران ثابت می‌باشد. با توجه به تعریف C_d، نتیجه می شود که $X \subset C_d$ و این با فرضِ $X \subset \mathbf{C} - C_d$ در تناقض است. پس مولفهٔ D همبند ساده می باشد.

ج)فرض خلف: اگر مجموعهٔ $\mathbf{C} - C_d$ همبند نباشد، آنگاه $\mathbf{C} - C_d$ دارای مولفهٔ کرانداری مانند X می‌باشد. دقیقاً با استفاده از روش قسمت (ب)، به تناقض می رسیم. پس $\mathbf{C} - C_d$ همبند می باشد. ■

تذکر: اگر مقدار d به بی نهایت میل کند، آنگاه مقدار α به مقدار ۱ نزدیک می‌شود، در نتیجه مجموعهٔ C_d به قرص واحد $\overline{D}$ همگرا خواهد شد.

۲—۴ همبندی مجموعهٔ C_d

در گزارهٔ ۲—۳.۴ نشان دادیم که مجموعهٔ $\mathbf{C} - C_d$ یک مجموعهٔ همبند می‌باشد. برای اثباتِ همبندیِ مجموعهٔ C_d، باید نشان دهیم که $\hat{\mathbf{C}} - C_d$ یک مجموعهٔ همبند ساده می‌باشد. یعنی کافی است یک نگاشت همدیس از $\hat{\mathbf{C}} - C_d$ به روی $\hat{\mathbf{C}} - \overline{D}$ پیدا کنیم.

برای این کار، از تابع بوچر و تابع گرین مجموعهٔ کامل ژولیا استفاده می کنیم. پس نتایج مربوط به این توابع را بررسی می کنیم.

برای هر $c \in \mathbf{C}$ مقدار R_c را به گونه ای انتخاب می کنیم که $R_c \geq max(\frac{d+1}{d}\alpha, \sqrt[d]{2|c|})$ و برای z در دامنهٔ $D_c = \{z \in C; |z| \geq R_c\}$ داشته باشیم $|f_c(z) - z^{d+1}| \leq \frac{|z|^{d+1}}{2}$. چون $|c_\circ|^d = \frac{|c|}{d+1} < 2|c|$ پس $c_\circ \notin D_c$. در نتیجه، می توان $\varphi_n(z,c)$ را به صورت شاخهٔ $(f_c^n(z))^{\frac{1}{(d+1)^n}}$ در دامنهٔ D_c تعریف کرد.

یعنی $\varphi_n(z,c)$ بر D_c خوش تعریف و تحلیلی می باشد.

لم ۲—۱.۴ آ) برای z نزدیک بی نهایت داریم $\varphi_n(z,c) \sim z$.

ب)برای $z \in D_c$ داریم $\varphi_n(f_c(z),c) = (\varphi_{n+1}(z,c))^{d+1}$.

اثبات.

آ) برای z نزدیک بی نهایت داریم

$$\varphi_n(z,c) = \sqrt[(d+1)^n]{f_c^n(z)} = z \sqrt[(d+1)^n]{\frac{f_c^n(z)}{z^{(d+1)^n}}} \sim z$$

ب)

$$\varphi_n(f_c(z),c) = (f_c^{n+1}(z))^{\frac{1}{(d+1)^n}}$$

$$= ((f_c^{n+1}(z))^{\frac{1}{(d+1)^{n+1}}})^{d+1} = (\varphi_{n+1}(z,c))^{d+1}.$$

■

اکنون نشان می دهیم که دنبالهٔ توابع $\{\varphi_n\}$ بر دامنهٔ D_c همگرای یکنواخت می‌باشند.

لم ۲—۲.۴ تابع (بوچر) تحلیلی، $\varphi_c(z)$ بر دامنهٔ D_c چنان موجود است که

$$\varphi_c(f_c(z)) = (\varphi_c(z))^{d+1}.$$

همچنین به ازای $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$ داریم $\varphi_c(f_c(\omega z)) = \varphi_c(f_c(z))$.

اثبات. مقدار $R_c > 0$ به گونه ای انتخاب شده بود تا رابطهٔ

$$|h_c(z)| = |\frac{f_c(z)}{z^{d+1}} - 1| \le \frac{1}{2}$$

در دامنهٔ D_c برقرار باشد. از طرفی $\varphi_n(z,c)$ بر D_c خوش تعریف و تحلیلی است. حال با استفاده از نامساوی

$$|\sqrt[m]{1+u}-1| \leq \frac{1}{m},$$

که در حالت $|u| \leq \frac{1}{2}$ برقراراست، می توان نتیجه گرفت که

$$|\frac{\varphi_{n+1}(z,c)}{\varphi_n(z,c)}-1| = |\sqrt[(d+1)^{n+1}]{1+h_c(f_c^n(z)}-1| \leq \frac{1}{(d+1)^{n+1}}.$$

بنابراین، حاصلضرب زیر

$$z\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_{n+1}(z,c)}{\varphi_n(z,c)} = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(z,c)$$

بر دامنهٔ D_c همگرای یکنواخت به یک تابع تحلیلی $\varphi_c(z)$ می باشد. بنابر قسمت (ب) درلم ۲–۱.۴، داریم:

$$\varphi_c(f_c(z)) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(f_c(z),c) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}(z,c)^{d+1} = (\varphi_c(z))^{d+1}.$$

همچنین موقعی که $\omega = e^{\frac{2\pi i}{d}}$، از تقارنِ تابعِ $f_c(z)$ داریم $f_c(\omega z) = \omega f_c(z)$. پس

$$\phi_c(f_c(\omega z)) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[(d+1)^n]{f_c^n(\omega z)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[(d+1)^n]{\omega f_c^n(z)}.$$

■

در حالت کلی، تابع بوچر نمی تواند به طور پیوسته به یک تابع تحلیلی بر کل $A_c(\infty)$ گسترش یابد.

اما می توانیم با استفاده از یک تابع همساز به این متمم دست یابیم.

چون حوزهٔ جذب بینهایت می تواند به صورت $A_c(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(f_c^n)^{-1}(D_c)$ نوشته شود، ما می‌توانیم

تابع همسازِ $G_c(z) = \log|\phi_c(z)|$ را بر $A_c(\infty)$ به صورت زیر تعریف کنیم.

تابع $\varphi_c(z)$ بر D_c تعریف شده است، پس $G_c(z)$ بر D_c تعریف شده می باشد. حال به ازای هر

$z \in A_c(\infty)$، nای موجود است که $z \in (f_c^n)^{-1}(D_c)$. پس، باقرار دادن

$$G_c(z) = \frac{1}{(d+1)^{n+1}} G_c(f_c^n(z)),$$

تابع $G_c(z)$ بر $A_c(\infty)$ خوش تعریف و همساز می باشد. اگر برای $z \in K_c$ قرار دهیم $G_c(z) = 0$ ، آن گاه تابع $G_c : \mathbf{C} \to R^+$ تبدیل به یک تابع پیوسته و زیرهمساز می شود. تابع $G_c(z)$ را تابع گرین مجموعهٔ K_c می نامیم.

در ادامه، می‌خواهیم نشان دهیم که تابع گرین $G_c(z)$، نسبت به پارامتر c پیوسته می‌باشد. نتیجهٔ زیر تعمیم قضیهٔ ۳.۲ فصل $VIII$ کتاب [۲] می باشد.

لم ۲—۳.۴ برای هر $A \geq 0$، وجود دارد $\alpha = \alpha(A) \geq 0$ به طوری که تابع گرین $G_c(z)$ برای $|c| \leq A$، α —هولدر پیوسته می‌باشد.

اثبات. فرض کنیم $A \geq 10$ و $z \in \mathbf{C} - K_c$. قرارمی دهیم $\delta(z) = dist(z, K_c)$. فرض کنیم نقطهٔ $z_0 \in K_c$ نزدیکترین نقطه به z در K_c باشد. اگر S را برابر با پاره‌خط از z_0 به z بگیریم، عدد طبیعی $N = N(z)$ را چنان در نظر می‌گیریم که برای همهٔ نقاط $w \in S$ و مقادیر $n < N$، داشته باشیم $|f_c^n(w)| < A$ و به ازای بعضی نقاط $z_1 \in S$ داشته باشیم $|f_c^N(z_1)| \geq A$. با استفاده از مقدار مشتق تابع $f_c(z)$، یعنی $f_c'(z) = (d+1)z^d + c$ و قاعدهٔ زنجیره‌ای مشتق، برای مقادیر $n < N$ و نقاط $w \in S$، می توان نتیجه گرفت که

$$|(f_c^n)'(w)| \leq ((d+1)A^d + A)^n.$$

از طرفی، در نقطهٔ z_0 مجموعهٔ مقادیر $|f_c^n(z_0)|$ کراندار است، در واقع برای تمام nها داریم $|f_c^n(z_0)| < 2\sqrt[d]{A}$. در غیراین صورت، اگر به ازای بعضی n_0 داشته باشیم $|f_c^n(z_0)| \geq 2\sqrt[d]{A}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$|f_c^{n+1}(z_0)| \geq |f_c^n(z_0)|(|f_c^n(z_0)|^d - |c|) \geq |f_c^n(z_0)|(2^d - 1)A > |f_c^n(z_0)|.$$

پس، $f_c^n(z_\circ)$ به بی نهایت واگرا می باشد. یعنی $z_\circ$ به حوزهٔ جذب $A_c(\infty)$ تعلق دارد که با فرض $z_\circ \in K_c$ تناقض دارد. پس شرط $|f_c^n(z_\circ)| < 2\sqrt[d]{A}$ برای تمام nها برقرار می‌باشد.

حال از قضیهٔ مقدار میانگین داریم:

$$|f_c^N(z_1) - f_c^N(z_\circ)| \leq ((d+1)A^d + A)^N \delta(z_1).$$

در نتیجه

$$|f_c^N(z_1) - | \leq 2\sqrt[d]{A} + ((d+1)A^d + A)^N \delta(z_1).$$

از طرفی داریم $|f_c^N(z_1)| \geq A$. بنابراین، می توان نتیجه گرفت

$$((d+1)A^d + A)^N \delta(z_1) \geq 1$$

و چون $\delta(z) \geq \delta(z_1)$ پس $((d+1)A^d + A)^N \delta(z) \geq 1$. حال با در نظر گرفتن α برابر با

$$\alpha = \frac{\log(d+1)}{\log((d+1)A^d + A)}$$

و نامساوی فوق می توان نتیجه گرفت که $(d+1)^{-N} < \delta(z)^\alpha$. بنابراین

$$G_c(z) = G_c(f_c^N(z))(d+1)^{-N} \leq M\delta(z)^\alpha,$$

که M تنها وابسته به A می باشد.

حال دو نقطهٔ دلخواه z_1 و z_2 را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که $\delta(z_2) \geq \delta(z_1)$. می خواهیم ثابت کنیم عدد ثابت B موجود است که

$$|G_c(z_1) - G_c(z_2)| \leq B|z_1 - z_2|^\alpha.$$

حالت اول: اگر $|z_1 - z_2| > \frac{1}{2}\delta(z_1)$، آنگاه نتیجه به ازای $B = 2^{\alpha+1}M$ برقرار می شود.

حالت دوم: اگر $|z_1 - z_2| \leq \frac{1}{2}\delta(z_1)$، و نامساوی هارناک را برای تابع همساز مثبت $G_c(z)$ در قرص

$D(z_1, \delta(z_1))$ به کار ببریم،(چون $\alpha < 1$) آنگاه داریم:

$$|G_c(z_1) - G_c(z_2)| \leq C_0 M \delta(z_1)^\alpha \frac{|z_1 - z_2|}{\delta(z_1)} \leq C|z_1 - z_2|^\alpha.$$

■

حال نشان می دهیم که تابع گرین $G_c(z)$ نسبت به پارامتر c نیز پیوسته می باشد.

لم ۲—۴.۴ [۲] تابع گرین $G_c(z)$ نسبت به پارامتر c پیوسته می باشد. دقیقتر اگر $c_n \to c$ ، آنگاه تابع گرین $G_{c_n}(z)$ بر $\mathbb{C}$ همگرای یکنواخت به $G_c(z)$ می باشد. بنابراین $G_c(z)$ نسبت به دو پارامترc و z پیوسته می باشد.

اثبات. از لم ۲—۳.۴، توابع $G_{c_n}(z)$ ،α—هولدر پیوسته می باشند. پس دنبالهٔ توابع $G_{c_n}(z)$ بر هر زیرمجموعهٔ فشرده همپیوسته می باشند. پس زیر دنباله‌ای از توابع $G_{c_n}(z)$ موجود است که بر زیر مجموعه های فشرده به طور یکنواخت به تابع همساز و پیوستهٔ $H(z)$ همگرا می‌باشد. با استفاده از اصل ماکزیمم، مجموعه $\{z \in \mathbb{C}; H(z) > 0\}$ هیچ مولفهٔ کراندار ندارد یعنی مجموعهٔ $\{z \in \mathbb{C}; H(z) > 0\}$ دقیقاً یک مولفهٔ بی‌کران می باشد. از طرف دیگر، توابع بوچر $\varphi_{c_n}(z)$ نسبت به پارامترc_n تحلیلی می‌باشند، بنابراین دنبالهٔ توابع گرین $G_{c_n}(z) = \log|\varphi_{c_n}(z)|$ (برای$|z|$ به اندازه کافی بزرگ)همگرای یکنواخت به تابع گرین $G_c(z) = \log|\varphi_c(z)|$ می باشد. در نتیجه، توابع $H(z)$ و $G_c(z)$ بر مجموعهٔ $A_c(\infty)$ با هم برابر می باشند (در کل $\mathbb{C}$ با هم برابر می‌باشند). اما $H(z)$ یکتا می باشد. بنابراین دنبالهٔ $G_{c_n}(z)$ همگرای یکنواخت به $G_c(z)$ است. ■

لم ۲—۵.۴ مجموعهٔ $\Omega = \{(z, c) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}; c \in C - C_d, G_c(z) > G_c(c_0)\}$ را در نظر می گیریم. در این صورت:

آ)نقطهٔ $(f_c(c_0), c)$ متعلق به مجموعهٔ Ω است.

ب)مجموعهٔ Ω در$\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ باز است.

اثبات.

آ) از خاصیت تابع گرین$G_c(z)$، داریم:

$$G_c(f_c(c_\circ)) = (d+1)G_c(c_\circ) > G_c(c_\circ).$$

بنابراین، $(f_c(c_\circ), c) \in \Omega$.

ب) تابع گرین $G(c,z) = G_c(z)$ نسبت به z و c پیوسته می‌باشد و مجموعهٔ $\mathbf{C} - C_d$ در $\mathbf{C}$ ومجموعهٔ $(G_c(c_\circ), \infty)$ در $\mathbf{R}$ باز می‌باشند. پس، $G^{-1}(\mathbf{C} - C_d, (G_c(c_0), \infty))$ در$\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ باز می باشد. ∎

حال آماده هستیم تانتیجهٔ اصلی این فصل یعنی همبندی مجموعهٔ C_d را ثابت کنیم.

قضیه ۲—۶.۴ مجموعهٔ C_d همبند است.

اثبات. تابع بوچر وابسته به تابع چندجمله‌ای $f_c(z)$ دارای نمایش به صورت زیر می باشد:

$$\phi_c(z) = \lim_{n\to\infty} (f_c^n(z))^{\frac{1}{(d+1)^n}} = z \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(f_c^n(z))^{\frac{1}{(d+1)^n}}}{(f_c^{n-1}(z))^{\frac{1}{(d+1)^{n-1}}}}$$

$$= z \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(f_c^{n-1}(z)((f_c^{n-1}(z))^d + c))}{(f_c^{n-1}(z))^{d+1}}\right)^{\frac{1}{(d+1)^n}} = z \prod_{n=\circ}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{f_c^n(z)}\right)^{\frac{1}{(d+1)^{n+1}}}.$$

حال به ازای هر $c \in \mathbf{C}$ مجموعهٔ جواب های معادلهٔ $f_c^n(z) = \circ$ همان تصویر معکوس $(f_c^n)^{-1}(\circ)$ می باشد. مقدار تابع گرین بر این مجموعه برابر صفر است و همین طور اگر مجموعهٔ نقاط بحراني چندجمله‌اي $f_c^n(z)$ را در نظر بگیریم، یعنی مجموعهٔ جواب معادله $(f_c^n(z))' = \circ$ را، که همان تصویر معکوس نقاط بحرانی $(f_c^n)^{-1}(c_\circ)$ می‌باشد، تابع گرین بر این نقاط بحرانی در رابطهٔ

$$G_c(z) = (d+1)^{-n} G(c_\circ) \le G(c_\circ)$$

صدق می کند. پس، اگر مجموعهٔ

$$\Omega = \{(z,c) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}; c \in \mathbf{C} - C_d, G_c(z) > G_c(c_0)\}$$

را در نظر بگیریم، تابع بوچر $\phi(z,c) = \phi_c(z)$ بر Ω خوش تعریف و تحلیلی می باشد.

حال نگاشت

$$\Phi : \mathbf{C} - C_d \to \mathbf{C} - \overline{D},$$

با ضابطهٔ

$$\Phi(c) = \phi(f_c(c_\circ), c) = \phi_c(f_c(c_\circ)).$$

را در نظر می گیریم. از لم ۲—۵.۴، مجموعهٔ Ω باز و نقطهٔ $(f_c(c_\circ), c)$ متعلق به Ω می‌باشد. از توضیحات بالا، تابع بوچر $\phi(z,c) = \phi_c(z)$ بر Ω خوش تعریف و تحلیلی می‌باشد و از طرفی رابطه $\phi_c(f_c(\omega z)) = \phi_c(f_c(z))$ به ازای هر z و مقدار $\omega = e^{2\pi i/d}$ برقرار است. پس، در حالت خاص، نقاط بحرانی در رابطهٔ $\phi_c(f_c(\omega c_\circ)) = \phi_c(f_c(c_\circ))$ صدق می‌کنند.

یعنی تابع $\Phi(c) = \phi(f_c(c_\circ), c) = \phi_c(f_c(c_\circ))$ مستقل از انتخاب نقطه بحرانی می باشد و به پارامتر c وابسته است. پس Φ بر Ω خوش تعریف است و چون ϕ بر Ω تحلیلی است پس Φ نیز نگاشت تحلیلی و خوش تعریف می باشد. از طرفی داریم:

$$\log|\Phi(c)| = \log|\phi_c(f_c(c_\circ))| = G_c(f_c(c_\circ)) = (d+1)G_c(c_\circ) > 0.$$

یعنی $|\Phi(c)| > 1$. پس برد Φ خارج قرص واحد می باشد.

حال می خواهیم نشان دهیم که Φ پوشا می باشد.

از لم ۲—۴.۴، می‌دانیم که تابع گرین $G_c(z)$ نسبت به پارامتر c پیوسته می باشد. پس، اگرپارامتر c از نقاطِ خارجِ $\mathbf{C} - C_d$ به مرز مجموعهٔ C_d همگرا شود، آنگاه $G_c(f_c(c_\circ)) \to 0$. چون مقدارِ تابع گرین بر مجموعهٔ C_d برابر صفر است. پس اگر c به مرز $\mathbf{C} - C_d$ میل کند، آنگاه $|\Phi(c)| \to 1$. لذا، نگاشت

$$\Phi : \mathbf{C} - C_d \to \mathbf{C} - \overline{D}$$

پوشا می‌باشد. از طرفی Φ یک قطب ساده دربی نهایت دارد و در مجموعهٔ $\mathbf{C} - C_d$ هیچ صفری ندارد. پس، بنابر اصل آرگومان، Φ هر مقداری از $\mathbf{C} - \overline{D}$ را دقیقاً یک بار در $\mathbf{C} - C_d$ می گیرد. چون Φ تحلیلی بود، پس نگاشت

$$\Phi : \mathbf{C} - C_d \to \mathbf{C} - \overline{D}$$

پوشا و همدیس می‌باشد. یعنی $\hat{\mathbf{C}} - C_d$ یک مجموعهٔ همبند ساده می‌باشد. پس C_d یک مجموعهٔ همبند است. ■

کتاب‌نامه

[1] A. F. Beardon, (1991): *Iteration of Rational Functions*, Grad. Texts Math. 132, Springer-Verlag, New York.

[2] Carleson, L. and Gamelin, T. W. (1993): *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York.

[3] A. Chademan and A. Zireh, Extension of the Douady-Hubbard's Theorem on Connectedness of the Mandelbrot set to Symmetric Polynomials , *Bull. Iranian Math. Soc*, **31**, no. 1 (2005), 77-84.

[4] Douady, A. and Hubbard, J. H. (1984,1985): Etude dynamique des polynomes complexes,I,II, *Publ. Math. Orsay*.

[5] Douady, A. and Hubbard, J. H. Itération des polynómes quadratiques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **294**, 123-126.

[6] Douady, A. and Hubbard, J. H. (1985): On the dynamics of polynomial-like maps, *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup*, **18**, 287-343.

[7] Lyubich, M. (1991): On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial, *IMS at Stony Brook Preprint* 1991/10.

[8] McMullen, C. (1994): Frontiers in complex dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **31**, 155-172.

[9] McMullen, C. (1994): Complex dynamics and renormalization, *Annals of Math. Studies,* **142**, Princeton University Press, 1994.

[10] Milnor, J. (2000): *Dynamics in one complex variable*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Islad.

[11] Morosawa, S. Nishimura, Y. Taniguchi, M. Ueda, T. (2000) *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press.

[12] Shishikura, M. (1998): The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Ann. of Math.* (2) **147** , no. 2, 225-267.

[13] Steinmetz, N. (1993): *Rational Iteration. Complex Analytic Dynamical System* , de Gruyter Studies in Mathematics, **16**, Walter de Gruyter Co., Berlin.

[14] Sullivan, D (1983): Conformal dynamical systems, in Geometric Dynamics, *Springer-Verlag Lecture notes,* 1007, 725-752.

[15] Yoccoz, J. C. (2005): Présentation par Adrian Douady et Jean Christophe Yoccoz de la note de Xavier Buff et Arnaud Chéritat, Ensebles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive, *Copmtes Rendus, Série Math. Dec. 2005.*