دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی یک چندجمله‌ای

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

پژوهشگر

سیده آسیه حسینی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: حسینی نام: سیده آسیه

عنوان: نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی یک چندجمله‌ای

استاد راهنما: دکتر احمد زیره

استاد مشاور: دکتر ابراهیم هاشمی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۶۷

واژگان کلیدی: مشتق قطبی، چندجمله‌ای، ماکسیمم قدرمطلق

چکیده

در این پایان‌نامه، به بیان نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی یک چندجمله‌ای می‌پردازیم و بهبودهایی از نامساوی‌های مشهوری از عزیز، دوان و نتایج معروف دیگر در این راستا بدست می‌آوریم.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد زیره، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سیده آسیه حسینی

۱۳۹۱

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در آنالیز مختلط به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات، چندجمله‌ای‌های مختلط نقشی اساسی دارند که از موارد قابل بحث در باب چندجمله‌ای‌ها می‌توان به یافتن محل صفرها، براوردهای مشتق معمولی و قطبی، رشد ماکسیمم قدرمطلق و براوردهای میانگین انتگرالی آن ها و... اشاره کرد. در تمامی این زمینه‌ها اصل ماکسیمم قدرمطلق نیز نقشی کلیدی ایفا می‌کند. دراین راستا مطالعات و بررسی‌های فراوانی توسط بزرگان و اندیشمندانی چون عبدالعزیز، محمدشاه، دوان، توران، رحمان، اسمیچر، گوویل و ... انجام شده است. ما نیز با ارائه این پایان‌نامه و با بیان نامساوی‌هایی در مورد مشتق قطبی از چندجمله‌ای‌ها گامی هر چند کوچک در جهت بهبود این نامساوی‌ها بر خواهیم داشت. از این رو در این فصل به بیان چند تعریف و قضیه‌های مهم می‌پردازیم.

۲.۱ تعاریف و قضایای مهم

تعریف ۱.۲.۱. هر مجموعه همبند و باز، میدان نامیده می‌شود. میدان را معمولا با D نمایش می‌دهند.

تعریف ۲.۲.۱. یک میدان به همراه بعضی، هیچ یک و یا همگی نقاط مرزی‌اش را ناحیه گویند.

تعریف ۳.۲.۱. تابع f را در z_0 تحلیلی گوییم، هرگاه در یک همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد.

تعریف ۴.۲.۱. اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه مشتق قطبی آن نسبت به نقطه α به فرم زیر خواهد بود

$$D_\alpha p(z) = np(z) + (\alpha - z)p'(z)$$

چندجمله‌ای $D_\alpha p(z)$ از درجه حداکثر $n-1$ است و مشتق معمولی $p'(z)$ از چندجمله‌ای $p(z)$ را تعمیم می‌دهد، به این معنی که

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{D_\alpha p(z)}{\alpha}=p'(z).$$

حال متناظر با چندجمله‌ای از درجه n $p(z)$ دنباله‌ای از مشتق‌های قطبی را می‌سازیم

$$\begin{aligned} D_{\alpha_1}p(z) &= np(z)+(\alpha-z)\,p'(z),\\ D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z) &= (n-k+1)\,D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_{k-1}}p(z)\\ &\quad+(\alpha_k-z)\left(D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_{k-1}}p(z)\right)', \qquad\qquad k=2,3,...,n \end{aligned}$$

برای $k=1,2,..,n$ نقاط $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ ممکن است برابر یا نابرابر باشند. همانند k−امین مشتق معمولی $p^k(z)$ از $p(z)$، مشتق قطبی $D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z)$ از $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر $n-k$ است.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای $q(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ را چندجمله‌ای مزدوج معکوس $p(z)$ گویند.

تعریف ۶.۲.۱. چندجمله‌ای $p(z)$ از درجه n خود معکوس نامیده می‌شود، اگر $p(z)=q(z)$ به طوری که $q(z)=z^np(\frac{1}{z})$.

تعریف ۷.۲.۱. اگر G یک زیرمجموعه باز از اعداد مختلط باشد، می‌گوییم تابع $u:G\longrightarrow\mathbb{R}$ هارمونیک است، هرگاه u دارای مشتق‌های جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد و $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

تعریف ۸.۲.۱. تابع f در یک نقطه تکین دارد، اگر در آن نقطه تحلیلی نباشد. به‌علاوه، اگر تابع در یک همسایگی یک تکین تحلیلی باشد، آن‌گاه گوییم آن نقطه تکین تنها است.

تعریف ۹.۲.۱. اگر تابع f در نقطه $z=a$ یک تکین تنها داشته باشد، a تکین برداشتنی است، هرگاه تابعی تحلیلی مانند $g:B(a;R)\to C$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر $0<|z-a|<R$ ، $g(z)=f(z)$. همچنین $B(a;R)$ گوی باز به مرکز a و شعاع R است.

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر تابع $f(z)$ در $z=z_0$ تکین تنها داشته باشد و $z\longrightarrow z_0$ ، $f(z)\to\infty$ ، آن‌گاه در $z=z_0$ قطب دارد.

قضیه ۱۱.۲.۱ (اساسی جبر). *اگر* $p(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i$ *چندجمله‌ای از درجه* n *باشد، آن‌گاه* $z_1,z_2,...,z_n\in C$ *وجود دارند بطوریکه* $p(z)=a_n\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$ *که* z_i *ها لزوما متمایز نیستند.*

قضیه ۱۲.۲.۱ (اصل ماکسیمم قدرمطلق). *اگر $f(z)$ در میدان کراندار D تحلیلی و بر بستار آن، $\overline{D}$ پیوسته باشد، آن‌گاه $|f(z)|$ ماکسیممی بر مرز دارد. به‌علاوه در نقاط درونی ماکسیمم ندارد مگر اینکه تابع ثابت باشد.*

قضیه ۱۳.۲.۱ (روشه[1]). *فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی خم ساده بسته C تحلیلی باشد و بر C، $|g(z)| < |f(z)|$، در این صورت $f(z)+g(z)$ و $f(z)$ درون C تعداد صفرهای برابر دارند.*

قضیه ۱۴.۲.۱ (کوشی[2]). *فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند ساده D تحلیلی و C مرز بسته‌ی واقع در درون D باشد، آنگاه $\int_C f(z)dz = 0$.*

قضیه ۱۵.۲.۱ (انتگرال کوشی). *فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند ساده‌ای که شامل مرز ساده بسته C است تحلیلی باشد. در این صورت $f(z)$ در هر نقطه z_0 درون C دارای مشتق از تمام مراتب است و*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

قضیه ۱۶.۲.۱ (نگاشت باز). *تابع تحلیلی غیر ثابت مجموعه‌های باز را بر مجموعه‌های باز می‌نگارد.*

[1] Rouche
[2] Cauchy

فصل ۲
نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی از چندجمله‌ای‌ها

۱.۲ نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی از چندجمله‌ای‌ها

در این فصل به بیان نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی از چندجمله‌ای‌هایی می‌پردازیم که شامل صفرهایشان را در ناحیه‌های $|z| \leq ۱$ و $|z| \geq k$ برای $k \geq ۱$ باشند. همچنین ماکسیمم و مینیمم مدولی از $k-$امین مشتق قطبی از $p(z)$ را تخمین می‌زنیم و تعمیم‌هایی فشرده از برخی نتایج مشهور را بدست می‌آوریم.

اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $p(z) \neq ۰$ در $|z| < ۱$ آن‌گاه

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq \frac{n}{۲} \left\{ \max_{|z|=۱} |p(z)| - \min_{|z|=۱} |p(z)| \right\} \tag{۱.۲}$$

و

$$\max_{|z|=R>۱} |p(z)| \leq \left(\frac{R^n + ۱}{۲} \right) \max_{|z|=۱} |p(z)| - \left(\frac{R^n - ۱}{۲} \right) \min_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۲.۲}$$

در (۱.۲) و (۲.۲) تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = \alpha z^n + \beta$ که $|\alpha| \geq |\beta|$ برقرار است. فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، به طوری که در دیسک $|z| < k$ ، $k \geq ۱$ صفر نشود، در این صورت

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq \frac{n}{۱ + k} \left(\max_{|z|=۱} |p(z)| - \min_{|z|=k} |p(z)| \right) \tag{۳.۲}$$

توران [۱] برای چندجمله‌ای $p(z)$ از درجه n که همه صفرهایش در $|z| \leq ۱$ واقع باشند، نشان داد

---
[۱] Turan

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \left(\frac{n}{2}\right)\max_{|z|=1}|p(z)| \tag{۴.۲}$$

که توسط عزیز و داوود [۲] به فرم زیر بهبود یافت،

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \left(\frac{n}{2}\right)\left\{\max_{|z|=1}|p(z)| + \min_{|z|=1}|p(z)|\right\} \tag{۵.۲}$$

و این بهبود برای مشتق قطبی از یک چندجمله‌ای توسط عزیز و احمد [۲] [۳] به فرم زیر برای $|\alpha| \geq 1$ تعمیم داده شد

$$\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)| \geq \left(\frac{n}{2}\right)\left\{(|\alpha|-1)\max_{|z|=1}|p(z)| + (|\alpha|+1)\min_{|z|=1}|p(z)|\right\} \tag{۶.۲}$$

تعمیمی از این نامساوی مربوط به مشتق قطبی برای $|\alpha_1| \geq 1$ ، $|\alpha_2| \geq 1$ ،... ، $|\alpha_k| \geq 1$ و $1 \leq k < n$ به فرم

$$\begin{aligned}\max_{|z|=1}|D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z)| \geq &\left\{\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{2^k}\right\}\\ &\Bigg[\{(|\alpha_1|-1)...(|\alpha_k|-1)\}\max_{|z|=1}|p(z)|\\ &+\left\{2^k|\alpha_1||\alpha_2|...|\alpha_k| - ((|\alpha_1|-1)...(|\alpha_k|-1))\right\}\min_{|z|=1}|p(z)|\Bigg]\end{aligned} \tag{۷.۲}$$

بدست می‌آوریم.

لم ۱.۱.۲. *اگر همه صفرهای چندجمله‌ای از درجه n ، $p(z)$ در نقاط درونی C قرار داشته باشند و ω هر صفری از $D_\alpha p(z) = np(z) + (\alpha - z)p'(z)$ مشتق قطبی از $p(z)$ باشد، آن‌گاه هر دو نقطه‌ی ω و α داخل C قرار دارند.*

این لم نتیجه‌ای از قضیه لاگور [۳] [۳۲] می‌باشد.

لم ۲.۱.۲. *اگر همه صفرهای چندجمله‌ای از درجه n ، $p(z)$ در $|z| \leq r$ قرار داشته باشند و هیچ کدام از نقاط $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ در $|z| \leq r$ واقع نباشند، آن‌گاه هر کدام از مشتق‌های قطبی $D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z)$ ، $k = 1, 2, ..., n-1$ نیز همه صفرهایش در $|z| \leq r$ واقع‌اند.*

قضیه ۳.۱.۲. [۴] *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq 1$ قرار داشته باشند، آن‌گاه برای $|z| \geq 1$ داریم:*

---
[۲] Ahmad
[۳] Laguerre

$$\begin{aligned}&\min_{|z|=1}\left|D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z)\right|\\&\geqslant n\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)\left|\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\right|\left|z\right|^{n-k}\min_{|z|=1}\left|p(z)\right|\end{aligned}\tag{۸.۲}$$

به طوری که α_i اعدادی حقیقی یا مختلط با $|\alpha_i| \geq 1$ ، $i = 1, 2, ..., k$ ؛ $k \leq n - 1$ هستند.

برهان. اگر $p(z)$ یک صفر روی $|z| = 1$ داشته باشد، آن‌گاه

$$m = \min_{|z|=1} |p(z)| = 0.$$

لذا نتیجه واضح است. حال فرض کنیم همه‌ی صفرهای $p(z)$ در $|z| < 1$ قرار داشته باشند، در این صورت $m > 0$، و برای $|z| = 1$ داریم $m \leq |p(z)|$. از این رو به ازای هر β که $|\beta| < 1$ و برای $|z| = 1$ داریم $|m\beta z^n| < |p(z)|$. بنابراین از قضیه روشه نتیجه می‌شود که همه صفرهای چندجمله‌ای $F(z) = p(z) - m\beta z^n$ در $|z| < 1$ واقع‌اند. اگر $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ اعداد مختلط با $|\alpha_i| \geq 1$ ، $i = 1, 2, ...k; k \leq n - 1$ باشند، آن‌گاه از لم ۲.۱.۲، همه صفرهای

$$\begin{aligned}&D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}F(z)\\&= D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z) - m\beta n\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)\alpha_1\alpha_2...\alpha_k z^{n-k}\end{aligned}\tag{۹.۲}$$

در $|z| < 1$ قرار دارند به طوری که برای $|z| \geq 1$ داریم:

$$\left|D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z)\right| \geq mn\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)\left|\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\right|\left|z\right|^{n-k}.\tag{۱۰.۲}$$

اگر نامساوی (۱۰.۲) صحیح نباشد، آن‌گاه نقطه $z = z_0$ وجود دارد که $|z_0| \geq 1$ ،

$$\left[mn(n-1)...(n-k+1)|\alpha_1\alpha_2...\alpha_k||z|^{n-k}\right]_{z=z_0} > \left[|D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z)|\right]_{z=z_0}$$

قرار می‌دهیم

$$\beta = \frac{\left[D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z)\right]_{z=z_0}}{\left[mn(n-1)...(n-k+1)\alpha_1\alpha_2...\alpha_k z^{n-k}\right]_{z=z_0}}$$

بنابراین $|\beta| < 1$ حال با توجه به انتخاب β و رابطه (۹.۲) و $|z_0| \geq 1$ داریم:

$$\left[D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}F(z)\right]_{z=z_0} = 0$$

، لذا با این حقیقت که صفرهای $D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}F(z)$ در $|z| < 1$ قرار دارند تناقض دارد. بنابراین از (۱۰.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}&\min_{|z|=1}\left|D_{\alpha_1}D_{\alpha_2}...D_{\alpha_k}p(z)\right|\\&\geq n\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)\left|\alpha_1\alpha_2...\alpha_k\right|\left|z\right|^{n-k}\min_{|z|=1}\left|p(z)\right|\end{aligned}$$

و لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

این نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = me^{i\beta}z^n$ ، $m > 0$ برقرار است.

نتیجه ۴.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq 1$ واقع باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| \geq 1$ برای $|z| \geq 1$ داریم:*

$$|D_\alpha p(z)| \geq n|\alpha||z|^{n-1} \min_{|z|=1} |p(z)| \tag{11.2}$$

این نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای چندجمله‌ای که همه صفرهایش در مبدا قرار دارند برقرار است.

ملاحظه ۵.۱.۲. *با تقسیم کردن هر دو طرف نامساوی (۱۱.۲) بر $|\alpha|$ ، $\alpha \to \infty$ و با توجه به این که*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{D_\alpha p(z)}{\alpha} = p'(z)$$

برای $|z| \geq 1$ ، داریم:

$$|p'(z)| \geq n|z|^{n-1} \min_{|z|=1} |p(z)|.$$

این لم از عزیز [۵] است.

لم ۶.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد به طوری که $\max_{|z|=1} |p(z)| = M$ و $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ ، $k \leq n-1$ اعداد مختلط باشند که برای $i = 1, 2, ..., k$ ، $|\alpha_i| \geq 1$ ، در این صورت برای $|z| \geq 1$ داریم:*

$$\begin{aligned} &|D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} ... D_{\alpha_k} p(z)| + |D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} ... D_{\alpha_k} q(z)| \\ &\leq n(n-1)...(n-k+1) \left\{ |\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_k||z|^{n-k} + 1 \right\} M \end{aligned} \tag{12.2}$$

به طوری که $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$.

قضیه زیر تعمیمی از نامساوی‌های (۱.۲) و (۲.۲) می‌باشد.

قضیه ۷.۱.۲. [۴] *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که در دیسک $|z| < 1$ صفر نشود، آن‌گاه برای $|z| \geq 1$ داریم:*

$$\begin{aligned}&|D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}p(z)|\\&\leq \frac{n\,(n-۱)\,...\,(n-k+۱)}{۲}\Big\{\Big(|\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k||z|^{n-k}+۱\Big)\max_{|z|=۱}|p(z)|\\&-\Big(|\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k||z|^{n-k}-۱\Big)\min_{|z|=۱}|p(z)|\Big\}\end{aligned}\tag{۱۳.۲}$$

به طوری که برای $i=۱,۲,...,k$ ، $|\alpha_i|\geq ۱$.

برهان. بنا به فرض، همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ در $|z|\leq ۱$ قرار دارند. در حالتی که یک صفر روی $|z|=۱$ داشته باشد،

$$m=\min_{|z|=۱}|p(z)|=۰$$

و نتیجه به وضوح برقرار است.

حال فرض کنیم همه صفرهای $p(z)$ در $|z|<۱$ واقع‌اند، آن‌گاه $m>۰$ و برای $|z|=۱$

$$m\leq |p(z)|.\tag{۱۴.۲}$$

اگر β هر عدد مختلطی باشد که $|\beta|<۱$، آن‌گاه از قضیه روشه نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای $F(z)=p(z)-\beta m$ در $|z|=۱$ نیز صفر نمی‌شود.

زیرا اگر برای برخی $z=z_۰$ که $|z_۰|=۱$، $F(z_۰)=p(z_۰)-m\beta=۰$، آن‌گاه

$$|p(z_۰)|=|m\beta|=m|\beta|<m$$

که با (۱۴.۲) در تناقض است. بنابراین به ازای هر β که $|\beta|<۱$، همه صفرهای چندجمله‌ای $F(z)=p(z)-\beta m$ در $|z|<۱$ قرار دارند. اگر

$$G(z)=z^n\overline{F(\frac{۱}{\overline{z}})}=z^n\overline{p(\frac{۱}{\overline{z}})}-\overline{\beta}mz^n=q(z)-\overline{\beta}mz^n$$

آن‌گاه همه صفرهای $G(z)$ در $|z|>۱$ قرار دارند و برای $|z|=۱$، $|F(z)|=|G(z)|$. بنابراین به ازای هر عدد مختلط λ که $|\lambda|>۱$، همه صفرهای چندجمله‌ای $F(z)-\lambda G(z)$ در $|z|<۱$ واقع‌اند. بنا به لم ۱.۱.۲ اگر $\alpha_۱,\alpha_۲,...,\alpha_k$ اعداد مختلطی باشند به طوری که $|\alpha_i|\geq ۱$ ، $۱\leq i\leq k$ همه صفرهای چندجمله‌ای $D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}(F(z)-\lambda G(z))$ در $|z|<۱$ قرار دارند. همچنین همه صفرهای $D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}F(z)-\lambda D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}G(z)$ نیز در $|z|<۱$ واقع‌اند. برای $|z|\geq ۱$ داریم:

$$|D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}F(z)|\leq |D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}G(z)|,$$

یا

$$|D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}(p(z)-m\beta)|\leq |D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}(q(z)-m\overline{\beta}z^n)|,$$

به طوری که معادل است با

$$
\begin{aligned}
&|D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}p(z)-m\beta n\,(n-۱)\,...\,(n-k+۱)\,|\\
&\le |D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}q(z)-m\overline{\beta}n\,(n-۱)\,...\,(n-k+۱)\,\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k z^{n-k}| \qquad (۱۵.۲)
\end{aligned}
$$

با در نظر گرفتن نامساوی (۱۰.۲) آرگومانی از β را در (۱۵.۲) به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که برای $|z|\ge ۱$ داشته باشیم

$$
\begin{aligned}
&|D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}p(z)|-m|\beta|n\,(n-۱)\,...\,(n-k+۱)\\
&\le |D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}q(z)|-m|\beta|n\,(n-۱)\,...\,(n-k+۱)\,|\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k||z|^{n-k}. \qquad (۱۶.۲)
\end{aligned}
$$

با فرض $|\beta|\to ۱$ در (۱۶.۲) بدست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
&|D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}p(z)|\\
&\le |D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}q(z)|-n\,(n-۱)\,...\,(n-k+۱)\left\{|\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k||z|^{n-k}-۱\right\}m. \qquad (۱۷.۲)
\end{aligned}
$$

حال $|D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}p(z)|$را به هر دو طرف از نامساوی (۱۷.۲) جمع می‌کنیم و سپس با ترکیب لم ۶.۱.۲ برای $|z|\ge ۱$ ، $|\alpha_i|\ge ۱$ ، $k\le n-۱; i=۱,۲,...,k$ داریم:

$$
\begin{aligned}
&|D_{\alpha_۱}D_{\alpha_۲}...D_{\alpha_k}p(z)|\\
&\le \frac{n\,(n-۱)\,...\,(n-k+۱)}{۲}\Big\{(|\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k||z|^{n-k}+۱)\max_{|z|=۱}|p(z)|\\
&-(|\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k||z|^{n-k}-۱)\min_{|z|=۱}|p(z)|\Big\}
\end{aligned}
$$

که نتیجه مورد نظر را می‌رساند و اثبات تکمیل می‌شود.

□

نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=\frac{۱}{۲}(z^n+۱)$ برقرار است.

نتیجه ۸.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که در دیسک $|z|<۱$ هیچ صفری نداشته باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha|\ge ۱$ برای $|z|\ge ۱$ داریم:*

$$
\begin{aligned}
|D_\alpha p(z)|\le \frac{n}{۲}\Big\{&(|\alpha||z|^{n-۱}+۱)\max_{|z|=۱}|p(z)|\\
&-(|\alpha||z|^{n-۱}-۱)\min_{|z|=۱}|p(z)|\Big\}. \qquad (۱۸.۲)
\end{aligned}
$$

نتیجه بهترین نتیجه ممکن است و تساوی در نامساوی (۱۸.۲) برای چندجمله‌ای $p(z) = az^n + b$ به طوری که $|a| = |b| = \frac{۱}{۲}$ و $|\alpha| \geq ۱$ برقرار است.

ملاحظه ۹.۱.۲. *با توجه به ملاحظه ۵.۱.۲، نتیجه می‌شود که اگر هر دو طرف از نامساوی (۱۸.۲) را بر $|\alpha|$ تقسیم کنیم و فرض کنیم که $|\alpha| \to \infty$، نامساوی (۱.۲) بدست می‌آید و برای $z = \alpha$، نامساوی (۲.۲) بدست می‌آید.*

اگر $p(z) = a_n z^n + a_{n-۱} z^{n-۱} + a_{n-۲} z^{n-۲} + \ldots + a_۲ z^۲ + a_۱ z + a_۰$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} D_\alpha p(z) &= np(z) + (\alpha - z)p'(z) \\ &= (n\alpha a_n + a_{n-۱})z^{n-۱} + ((n-۱)\alpha a_{n-۱} + ۲a_{n-۲})z^{n-۲} + \\ &\ldots + (۲\alpha a_۲ + (n-۱)a_۱)z + (\alpha a_۱ + na_۰). \end{aligned}$$

اگر چندجمله‌ای $p(z)$ هیچ صفری در دیسک $|z| < ۱$ نداشته باشد، آن‌گاه از قضیه ۷.۱.۲ برای $k = ۱$ ، $|\alpha| \geq ۱$ و $|z| \geq ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} &|(n\alpha a_n + a_{n-۱})z^{n-۱} + ((n-۱)\alpha a_{n-۱} + ۲a_{n-۲})z^{n-۲} + \\ &\ldots + (۲\alpha a_۲ + (n-۱)a_۱)z + (\alpha a_۱ + na_۰)| \\ &\leq \frac{n}{۲}\left\{(|\alpha||z|^{n-۱} + ۱)\max_{|z|=۱}|p(z)| - (|\alpha||z|^{n-۱} - ۱)\min_{|z|=۱}|p(z)|\right\} \end{aligned}$$

اگر هر دو طرف از این نامساوی را بر $|z|^{n-۱}$ تقسیم کنیم و با فرض $|z| \to \infty$ به سادگی بدست می‌آوریم

$$|n\alpha a_n + a_{n-۱}| \leq \frac{n}{۲}|\alpha|\left\{\max_{|z|=۱}|p(z)| - \min_{|z|=۱}|p(z)|\right\}.$$

به ازای هر α که $|\alpha| \geq ۱$ و با انتخاب آرگومانی مناسب از α نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۰.۱.۲. *اگر $p(z) = \sum_{j=۱}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد به طوری که در دیسک $|z| < ۱$ صفر نشود، آن‌گاه*

$$n|a_n| + |a_{n-۱}| \leq \frac{n}{۲}\left\{\max_{|z|=۱}|p(z)| - \min_{|z|=۱}|p(z)|\right\}.$$

لم بعد از عزیز [۵] است.

لم ۱۱.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد به طوری که $\max_{|z|=۱}|p(z)| = M$ و α هر عدد مختلط با $|\alpha| \geq ۱$ ، آن‌گاه برای $|z| \geq ۱$ داریم:*

$$|D_\alpha p(z)| + |D_\alpha q(z)| \leq n\left\{|\alpha z^{n-۱}| + ۱\right\} M \qquad (۱۹.۲)$$

به طوری که $q(z) = z^n \overline{p(\frac{۱}{\bar{z}})}$.

لم ۱۲.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n و α هر عدد حقیقی یا مختلط باشد، آن‌گاه برای* $|z|=۱$

$$|D_\alpha q(z)| = |n\overline{\alpha}p(z) + (۱-\overline{\alpha}z)\, p'(z)| \tag{۲۰.۲}$$

به طوری که $q(z) = z^n\overline{p(\frac{۱}{\overline{z}})}$.

برهان. از آنجایی‌که $q(z) = z^n\overline{p(\frac{۱}{\overline{z}})}$ داریم:

$$q'(z) = nz^{n-۱}\overline{p(\frac{۱}{\overline{z}})} - z^{n-۲}\overline{p'(\frac{۱}{\overline{z}})}$$

حال اگر $|z|=۱$، آن‌گاه $z = (\frac{۱}{\overline{z}})$ و داریم:

$$q(z) = z^n\overline{p(z)}$$

و

$$q'(z) = nz^{n-۱}\overline{p(z)} - z^{n-۲}\overline{p'(z)}$$

بنابراین برای $|z|=۱$ بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
|D_\alpha q(z)| &= |nq(z) + (\alpha - z)q'(z)| \\
&= |nz^n\overline{p(z)} + (\alpha - z)(nz^{n-۱}\overline{p(z)} - z^{n-۲}\overline{p'(z)})| \\
&= |nz^n\overline{p(z)} + \alpha nz^{n-۱}\overline{p(z)} - \alpha z^{n-۲}\overline{p'(z)} - nz^n\overline{p(z)} + z^{n-۱}\overline{p'(z)}| \\
&= |n\alpha z^{n-۱}\overline{p(z)} - (\alpha - z)z^{n-۲}\overline{p'(z)}| \\
&= |n\alpha z\overline{p(z)} - (\alpha - z)\overline{p'(z)}| \\
&= |n\overline{\alpha}p(z) - (\overline{\alpha}z - ۱)p'(z)| \\
&= |n\overline{\alpha}p(z) + (۱ - \overline{\alpha}z)p'(z)|.
\end{aligned}$$

لذا لم ثابت می‌شود.

□

لم ۱۳.۱.۲. [۶] *اگر $p(z)$ چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $۱ \geq k \geq |z|$ قرار داشته باشند و $|p(z)|$ ،$m = \min_{|z|=k}|p(z)|$ آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $|\alpha| \geq (\frac{۱}{k})$ و برای $|z| \geq (\frac{۱}{k})$ داریم:*

$$|D_\alpha q(z)| \geq nm|\alpha z^{n-۱}| \tag{۲۱.۲}$$

به طوری که $q(z) = z^n\overline{p(\frac{۱}{\overline{z}})}$.

لم ۱۴.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $q(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α و برای $|z| = 1$ داریم:*

$$|D_\alpha p(z)| + |D_\alpha q(z)| \leq n(1 + |\alpha|) \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{۲۲.۲}$$

برهان. بنا به لم ۲ از آنکنی [۱] ، اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه برای $|z| = 1$ داریم:

$$|p'(z)| + |np(z) - zp'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{۲۳.۲}$$

حال، اگر $q(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ آن‌گاه برای $|z| = 1$، $|q'(z)| = |np(z) - zp'(z)|$. بنابراین به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α، با استفاده از نامساوی (۲۳.۲) برای $|z| = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
|D_\alpha p(z)| + |D_\alpha q(z)| &= |np(z) + (\alpha - z)p'(z)| + |nq(z) + (\alpha - z)q'(z)| \\
&\leq |np(z) - zp'(z)| + |\alpha||p'(z)| + |nq(z) - zq'(z)| + |\alpha||q'(z)| \\
&= |q'(z)| + |\alpha||p'(z)| + |p'(z)| + |\alpha||q'(z)| \\
&= (1 + |\alpha|) \left\{|p'(z)| + |q'(z)|\right\} \\
&\leq n(1 + |\alpha|) \max_{|z|=1} |p(z)|.
\end{aligned}$$

لذا لم ثابت می‌شود.

□

درباره تخمینی از $|p'(z)|$ روی دایره واحد و تخمینی از $|p(z)|$ روی دایره بزرگ‌تر $|z| = R > 1$ قضایای زیر را داریم.

قضیه ۱۵.۱.۲. [۶] *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$ ، $k \geq 1$ نداشته باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد مختلط α با $|\alpha| \geq 1$ داریم:*

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \leq \frac{n}{1 + k} \left\{(|\alpha| + k) \max_{|z|=1} |p(z)| - (|\alpha| - 1) \min_{|z|=k} |p(z)|\right\}. \tag{۲۴.۲}$$

برهان. بنا به فرض $p(z)$ همه صفرهایش در $|z| \geq k \geq 1$ هستند. فرض کنیم $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$، در این صورت برای $|z| = k$ داریم:

$$m \leq |p(z)| \qquad (۲۵.۲)$$

ابتدا نشان می‌دهیم برای هر β که $|\beta| \leq ۱$، همه صفرهای چندجمله‌ای $F(z) = p(z) - \beta m$ در $|z| \leq k \leq ۱$ واقع‌اند. واضح است اگر $p(z)$ یک صفر در $|z| = k$ داشته باشد، آن‌گاه $m = ۰$ و $F(z) = p(z)$. در حالتی که $p(z)$ هیچ صفری در $|z| = k$ نداشته باشد، آن‌گاه $m > ۰$ و از آن جایی که $\frac{m}{p(z)}$ ثابت نیست، بنا به اصل ماکسیمم قدرمطلق و از $|\beta m| < m < |p(z)|$ نتیجه می‌شود که برای $|z| < k$

$$m < |p(z)|. \qquad (۲۶.۲)$$

حال اگر $F(z)$ یک صفر در $|z| < k$ مانند $z = z_۰$ که $|z_۰| < k$ داشته باشد، آن‌گاه $F(z_۰) = p(z_۰) - \beta m = ۰$ به طوری که برای $|z_۰| < k$،

$$|p(z_۰)| = |\beta m| \leq m$$

که با (۲۶.۲) در تناقض است و لذا در هر حالتی همه صفرهای $F(z) = p(z) - \beta m$ در $|z| \leq k \leq ۱$ قرار دارند. لذا همه صفرهای چندجمله‌ای $G(z) = F(kz)$ نیز در $|z| \leq ۱$ قرار دارند و اگر

$H(z) = z^n G(\frac{۱}{\overline{z}})$ آن‌گاه از قضیه روشه نتیجه می‌شود که به ازای هر عدد مختلط λ که $|\lambda| > ۱$ همه صفرهای چندجمله‌ای $G(z) - \lambda H(z)$ در $|z| \leq ۱$ قرار دارند. بنابراین اگر α هر عدد حقیقی یا مختلطی باشد که $|\alpha| \geq ۱$ آن‌گاه بنا به لم ۲.۱.۲ همه صفرهای چندجمله‌ای $D_\alpha(G(z) - \lambda H(z))$ نیز در $|z| \leq ۱$ قرار دارند. متناظرا همه صفرهای $D_\alpha G(z) - \lambda D_\alpha H(z)$ به ازای هر λ که $|\lambda| > ۱$ در $|z| \leq ۱$ واقع‌اند. به وضوح برای $|z| \geq ۱$ و $|\alpha| \geq ۱$ داریم:

$$|D_\alpha G(z)| \leq |D_\alpha H(z)| \qquad (۲۷.۲)$$

برای نامساوی (۲۷.۲) بنا به لم ۱۲.۱.۲ برای $|\alpha| \geq ۱$ و $|z| = ۱$ بدست می‌آوریم:

$$|D_\alpha G(z)| \leq |D_\alpha H(z)| = |n\overline{\alpha}G(z) + (۱ - \overline{\alpha}z)G'(z)|$$

در نتیجه

$$|D_\alpha G(z)| \leq |n\overline{\alpha}G(z) + (۱ - \overline{\alpha}z)G'(z)| = |\alpha||nG(z) + (\frac{۱}{\overline{\alpha}} - z)G'(z)| \qquad (۲۸.۲)$$

اگر $\alpha = 1$، آن‌گاه بنا به لم ۲ از [۷] قضیه برقرار است. فرض کنیم $|\alpha| < 1$ و $|\frac{1}{\overline{\alpha}}| > 1$، بنابراین بنا به لم ۲.۱.۲ همه صفرهای

$$D_{\frac{1}{\overline{\alpha}}} G(z) = nG(z) + (\frac{1}{\overline{\alpha}} - z)G'(z)$$

در $|z| \leq 1$ قرار دارند.

بنابراین از اصل ماکسیمم قدرمطلق نامساوی (۲۸.۲) برای $|z| \leq 1$ نیز برقرار است. حال $G(z)$ را با $F(kz)$ جایگزین می‌کنیم، برای $|z| \leq 1$ بدست می‌آوریم:

$$|nF(kz) + (\alpha - z)kF'(kz)| \leq |n\overline{\alpha}F(kz) + (1 - \overline{\alpha}z)kF'(kz)| \tag{۲۹.۲}$$

در حالت خاص در (۲۹.۲)، $z = e^{\frac{i\theta}{k}}$ ، $0 \leq \theta < 2\pi$ ،$k \geq 1$ قرار می‌دهیم، لذا داریم:

$$|nF(e^{i\theta}) + (\alpha k - e^{i\theta})F'(e^{i\theta})| \leq |n\overline{\alpha}F(e^{i\theta}) + (k - \overline{\alpha}e^{i\theta})F'(e^{i\theta})|$$

به طوری که برای $|z| = 1$ نتیجه می‌دهد

$$|nF(z) + (\alpha k - z)F'(z)| \leq |n\overline{\alpha}F(z) + (k - \overline{\alpha}z)F'(z)|$$

این نامساوی با کمک از لم ۱۲.۱.۲ وقتی که $|z| = 1$ نتیجه می‌دهد

$$|D_{\alpha k}F(z)| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}T(z)| \tag{۳۰.۲}$$

به طوری که

$$T(z) = z^n\overline{F(\frac{1}{\overline{z}})} = q(z) - \overline{\beta}mz^n$$

از نامساوی (۳۰.۲) برای $|z| = 1$ داریم:

$$|D_{\alpha k}(p(z) - \beta m)| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}(q(z) - \overline{\beta}mz^n)|$$

به طور معادل داریم:

$$|D_{\alpha k}p(z) - n\beta m| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}q(z) - n\overline{\beta}m\frac{\alpha}{k}z^{n-1}|$$

که برای$|\alpha| \geq 1$ و به ازای هر β که $|\beta| \leq 1$ روی $|z| = 1$

$$|D_{\alpha k}p(z)| - n|\beta|m \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}q(z) - n\overline{\beta}m\frac{\alpha}{k}z^{n-1}| \tag{۳۱.۲}$$

حال با استفاده از لم ۱۳.۱.۲ با $\lambda = \frac{\alpha}{k}$ به طوری که $|\lambda| = \frac{|\alpha|}{k} \geq \frac{1}{k}$ برای $|z| \geq \frac{1}{k}$ داریم:

$$|D_{\frac{\alpha}{k}}q(z)| \geq nm|\frac{\alpha}{k}z^{n-1}| \tag{۳۲.۲}$$

از آنجایی‌که $\frac{۱}{k} \geq ۱$ نامساوی (۳۲.۲) برای $|z| \geq ۱$ نیز برقرار است. آرگومانی از β با $|\beta| = ۱$ در (۳۱.۲) به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که برای $|z| \geq ۱$ داشته باشیم

$$|D_{\frac{\alpha}{k}} q(z) - n\overline{\beta} m \frac{\alpha}{k} z^{n-۱}| = |D_{\frac{\alpha}{k}} q(z)| - nm\frac{|\alpha|}{k}|z^{n-۱}| \qquad (۳۳.۲)$$

به طوری که از (۳۲.۲) در حالت خاص از (۳۱.۲) برای $|z| = ۱$ داریم:

$$|D_{\alpha k} p(z)| - nm \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}} q(z)| - nm|\alpha|$$

همچنین برای $|z| = ۱$ نتیجه می‌دهد

$$|D_{\alpha k} p(z)| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}} q(z)| - n\left(|\alpha| - ۱\right) m \qquad (۳۴.۲)$$

چون

$$\begin{aligned}
\left(۱ + k\right)|D_\alpha p(z)| &= |\left(۱ + k\right)\left\{np(z) + \left(\alpha - z\right)p'(z)\right\}| \\
&= |np(z) + (\alpha k - z)p'(z) + k\left\{np(z) + (\frac{\alpha}{k} - z)p'(z)\right\}| \\
&= |D_{\alpha k} p(z) + kD_{\frac{\alpha}{k}} p(z)| \\
&\leqslant |D_{\alpha k} p(z)| + k|D_{\frac{\alpha}{k}} p(z)|
\end{aligned}$$

با استفاده از (۳۴.۲) برای $|z| = ۱$ بدست می‌آوریم

$$\left(۱ + k\right)|D_\alpha p(z)| \leq k\left\{|D_{\frac{\alpha}{k}} p(z)| + |D_{\frac{\alpha}{k}} q(z)|\right\} - n\left(|\alpha| - ۱\right)m \qquad (۳۵.۲)$$

حال با کمک از لم ۱۴.۱.۲ و $\delta = \frac{\alpha}{k}$ از (۳۵.۲) برای $|z| = ۱$ داریم:

$$\begin{aligned}
(۱ + k)|D_\alpha p(z)| &\leq nk(۱ + |\frac{\alpha}{k}|)\max_{|z|=۱}|p(z)| - n(|\alpha| - ۱)m \\
&= n(k + |\alpha|)\max_{|z|=۱}|p(z)| - n(|\alpha| - ۱)m
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \leq \frac{n}{۱ + k}\left\{(k + |\alpha|)\max_{|z|=۱}|p(z)| - (|\alpha| - ۱)\min_{|z|=k}|p(z)|\right\}.$$

لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

نامساوی بهترین نتیجه ممکن است است و تساوی برای $p(z) = (z+k)^n$ با عدد حقیقی $|\alpha| \geq ۱$ و $k \geq ۱$ برقرار است.

ملاحظه ۱۶.۱.۲. *با تقسیم کردن هر دو طرف از نامساوی (۲۴.۲) بر $|\alpha|$ و فرض $|\alpha| \to \infty$ نامساوی (۳.۲) بدست می‌آید.*

قضیه ۱۷.۱.۲. [۶] *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < k$، $k \geq ۱$ نداشته باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| > k$ برای $|z| \geq ۱$ داریم:*

$$|D_\alpha p(z)| \leq \frac{n}{۱+k}\left\{(|\alpha z^{n-۱}| + k)\max_{|z|=۱}|p(z)| - (|\alpha z^{n-۱}| - ۱)\min_{|z|=k}|p(z)|\right\}. \qquad (۳۶.۲)$$

برهان. بنا به فرض $|\alpha| > k \geq ۱$، بنابراین روند اثبات به سادگی مانند اثبات قضیه قبل است. بنا به نامساوی (۳۰.۲) برای $|z| = ۱$ داریم:

$$|D_{\alpha k}F(z)| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}T(z)|$$

به طوری که $F(z) = p(z) - \beta m$ و $T(z) = z^n\overline{F(\frac{۱}{\overline{z}})} = q(z) - \overline{\beta}mz^n$. از آن‌جایی‌که همه صفرهای $F(z)$ در $|z| \geq k$ واقع‌اند، بنابراین همه صفرهای $T(z)$ در $|z| \leq \frac{۱}{k}$ واقع‌اند و $|\frac{\alpha}{k}| > (\frac{۱}{k})$.
با استفاده از لم ۲.۱.۲ نتیجه می‌شود که همه صفرهای $D_{\frac{\alpha}{k}}T(z)$ در $|z| \leq (\frac{۱}{k}) \leq ۱$ واقع‌اند.
بنابراین از اصل ماکسیمم قدر مطلق برای $|z| \geq ۱$ داریم:

$$|D_{\alpha k}F(z)| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}T(z)|$$

لذا برای $|\alpha| > k$ و $|z| \geq ۱$ داریم:

$$|D_{\alpha k}(p(z) - \beta m)| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}(q(z) - m\overline{\beta}z^n)|$$

به طوری که

$$|D_{\alpha k}p(z) - n\beta m| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}q(z) - nm\overline{\beta}(\frac{\alpha}{k})z^{n-۱}| \qquad (۳۷.۲)$$

آرگومانی از β که $|\beta| = ۱$ را در (۳۷.۲) مشابه (۳۳.۲) چنان انتخاب می‌کنیم که برای $|z| \geq ۱$ و $|\alpha| > k$ بدست می‌آوریم

$$|D_{\alpha k}p(z)| - nm \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}q(z)| - nm|\alpha z^{n-۱}|$$

در نتیجه

$$|D_{\alpha k}p(z)| \leq k|D_{\frac{\alpha}{k}}q(z)| - n(|\alpha z^{n-۱}| - ۱)m \qquad (۳۸.۲)$$

نامساوی (۳۸.۲) در ترکیب با لم ۱۱.۱.۲ با $\delta = (\frac{\alpha}{k})$ ، $(|\delta| = |\frac{\alpha}{k}| > ۱)$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}(1+k)|D_\alpha p(z)| &= |(1+k)\left\{np(z)+(\alpha-z)p'(z)\right\}| \\ &= |D_{\alpha k}p(z)+kD_{\overline{\frac{\alpha}{k}}}p(z)| \\ &\leq |D_{\alpha k}p(z)|+k|D_{\overline{\frac{\alpha}{k}}}p(z)| \\ &\leq k\{|D_{\overline{\frac{\alpha}{k}}}p(z)|+|D_{\overline{\frac{\alpha}{k}}}q(z)|\}-n(|\alpha z^{n-1}|-1)m \\ &\leq k\{n(|(\frac{\alpha}{k})z^{n-1}|+1)M\}-n(|\alpha z^{n-1}|-1)m\end{aligned}$$

به طور معادل برای $|\alpha|>k$ و $|z|\geq 1$ داریم:

$$|D_\alpha p(z)|\leq \frac{n}{1+k}\left\{(|\alpha z^{n-1}|+k)\max_{|z|=1}|p(z)|-(|\alpha z^{n-1}|-1)\min_{|z|=k}|p(z)|\right\}$$

لذا اثبات قضیه کامل می‌شود. □

نتیجه برای $k=1$ بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z)=z^n+1$ با یک عدد حقیقی $\alpha\geq 1$ برقرار است.

نتیجه بعد یک تعمیم از نامساوی (۲.۲) است و از قضیه قبل با قرار دادن $z=\alpha=Re^{i\theta}$ برای $R>k$، $0\leq\theta<2\pi$ در نامساوی (۳۶.۲) و با توجه به این که $\{D_\alpha p(z)\}_{z=\alpha}=np(\alpha)$ نتیجه شده است.

نتیجه ۱۸.۱.۲. *فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و هیچ صفری در $|z|<k$ ، $k\geq 1$ نداشته باشد، در این صورت به ازای هر عدد حقیقی $R>k$ ، $0\leq\theta<2\pi$ و $k\geq 1$ داریم:*

$$|p(Re^{i\theta})|\leq\left(\frac{R^n+k}{1+k}\right)\max_{|z|=1}|p(z)|-\left(\frac{R^n-1}{1+k}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|. \tag{۳۹.۲}$$

قضیه ۱۹.۱.۲. [۶] *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و همه صفرهایش در $|z|\leq k\leq 1$ واقع باشند و همچنین α هر عدد حقیقی یا مختلط با $|\alpha|\leq 1$، آن‌گاه برای $|z|=1$ داریم:*

$$|D_\alpha p(z)|\leq n\left(\frac{k+|\alpha|}{1+k}\right)\max_{|z|=1}|p(z)|-n\left(\frac{1-|\alpha|}{k^{n-1}(1+k)}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|. \tag{۴۰.۲}$$

برهان. بنا به فرض همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ در $|z|\leq k\leq 1$ قرار دارند، بنابراین چندجمله‌ای $q(z)=z^np(\frac{1}{\overline{z}})$ هیچ صفری در $|z|<(\frac{1}{k})$ که $(\frac{1}{k})\geq 1$ ندارد. با به کار بردن قضیه ۱۵.۱.۲ برای چندجمله‌ای $q(z)$، برای $|\beta|\geq 1$ و $|z|=1$ داریم:

$$|D_\beta q(z)|\leq\frac{n}{1+\frac{1}{k}}\left\{\left(|\beta|+\frac{1}{k}\right)\max_{|z|=1}|q(z)|-(|\beta|-1)\min_{|z|=\frac{1}{k}}|q(z)|\right\}$$

به طوری که برای $|z| = ۱$ نتیجه می‌دهد که

$$|D_\beta q(z)| \leq \frac{n(|\beta|k+۱)}{۱+k} \max_{|z|=۱} |p(z)| - \frac{nk(|\beta|-۱)}{۱+k} . \frac{۱}{k^n} \min_{|z|=k} |p(z)| \tag{۴۱.۲}$$

حال از لم ۱۲.۱.۲ به سادگی برای $|\beta| \geq ۱$ و $|z| = ۱$ داریم:

$$|D_\beta q(z)| = |\beta||D_{\frac{۱}{\overline{\beta}}} p(z)| \tag{۴۲.۲}$$

برای $|z| = ۱$ و $|\beta| \geq ۱$ نامساوی (۴۲.۲) را در (۴۱.۲) به کار می‌بریم لذا

$$|\beta||D_{\frac{۱}{\overline{\beta}}} p(z)| \leq \frac{n(|\beta|k+۱)}{۱+k} \max_{|z|=۱} |p(z)| - \frac{n(|\beta|-۱)}{k^{n-۱}(۱+k)} \min_{|z|=k} |p(z)| \tag{۴۳.۲}$$

حال $\frac{۱}{\overline{\beta}}$ را با α جایگزین می‌کنیم، به طوری که $|\alpha| \leq ۱$ از (۴۳.۲) برای $|z| = ۱$ و $|\alpha| \leq ۱$ داریم:

$$|D_\alpha p(z)| \leq \frac{n(k+|\alpha|)}{۱+k} \max_{|z|=۱} |p(z)| - \frac{n(۱-|\alpha|)}{k^{n-۱}(۱+k)} \min_{|z|=k} |p(z)|$$

لذا اثبات کامل می‌شود.

□

نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای $p(z) = (z+k)^n$ با یک عدد حقیقی $\alpha \geq ۰$ برقرار است.

قضیه ۲۰.۱.۲. [۶] *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه برای $|z| \geq ۱$ داریم:*

$$|D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z)| \leq n(n-۱)...(n-k+۱)|\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k z^{n-k}| \max_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۴۴.۲}$$

وقتی که $|\alpha_i| \geq ۱$ برای هر $i = ۱,۲,...,k$ ؛ $k \leq n-۱$

برهان. فرض کنیم $M = \max_{|z|=۱} |p(z)|$، بنابراین برای $|z| = ۱$ ، $|p(z)| < M$. فرض کنیم β هر عدد حقیقی یا مختلطی با $|\beta| > ۱$ باشد، آنگاه برای $|z| = ۱$ ، $|p(z)| < |M\beta z^n|$. از قضیه روشه نتیجه می‌شود که همه صفرهای $p(z) - \beta M z^n$ در $|z| > ۱$ واقع‌اند. با استفاده از لم ۲.۱.۲ به ازای اعداد مختلط $\alpha_۱, \alpha_۲, ..., \alpha_k$ ، $|\alpha_i| \geq ۱$ ، $۱ \leq i \leq k$ و به ازای β که $|\beta| > ۱$ نتیجه می‌شود که همه صفرهای چندجمله‌ای $D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k}(p(z) - \beta M z^n)$ در $|z| > ۱$ واقع‌اند. به طور معادل به ازای هر β با $|\beta| > ۱$ همه صفرهای چندجمله‌ای

$$D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z) - n(n-۱)...(n-k+۱)\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k \beta M z^{n-k}$$

نیز در $|z| > ۱$ واقع‌اند. برای $|z| \geq ۱$، نتیجه می‌شود

$$|D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z)| \leq n(n-۱)...(n-k+۱)|\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k z^{n-k}| M$$

به طوری که معادل با نامساوی (۴۴.۲) است و قضیه اثبات می‌شود.

□

نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = \alpha z^n$ ، $|\alpha| = ۱$ برقرار است.

نتیجه ۲۱.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| \geq ۱$ ، برای $|z| \geq ۱$ داریم:*

$$|D_\alpha p(z)| \leq n|\alpha z^{n-۱}| \max_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۴۵.۲}$$

لم ۲۲.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله ای از درجه n شامل همه صفرهایش در $|z| \leq ۱$ باشد، آن‌گاه برای $|\alpha| \geq ۱$ و $|z| = ۱$ داریم:*

$$|D_\alpha p(z)| \geq n\{\frac{(|\alpha| - ۱)}{۲}\}|p(z)|.$$

برهان. به وضوح لم برای $|\alpha| = ۱$ برقرار است، بنابراین $|\alpha| > ۱$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $p(z) = z^n \overline{q(\frac{۱}{\bar{z}})}$ آن‌گاه $q(z) = z^z \overline{p(\frac{۱}{\bar{z}})}$ و تمام صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq ۱$ و $q(z)$ چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشد و برای $|z| = ۱$ ، $|p(z)| = |q(z)|$ آن‌گاه برای $|z| \geq ۱$ داریم:

$$|q(z)| \leq |p(z)|$$

نتیجه می‌دهد که چندجمله‌ای از درجه n

$$T(z) = q(z) - \lambda p(z)$$

برای $|\lambda| > ۱$ در $|z| > ۱$ صفر نخواهد شد. پس بنا به لم ۲.۱.۲ چندجمله‌ای

$$\begin{aligned} D_\alpha T(z) &= (\alpha - z)q'(z) + nq(z) - \lambda D_\alpha p(z) \\ &= S(z) - \lambda D_\alpha p(z) \end{aligned} \tag{۴۶.۲}$$

نیز برای $|\alpha| > ۱$ و به ازای هر λ که $|\lambda| > ۱$ در $|z| > ۱$ صفر نمی‌شود و بر این اساس برای $|z| > ۱$

$$|S(z)| \leq |D_\alpha p(z)|$$

به طوری که برای $|z| \geq ۱$

$$|S(z)| \leq |D_\alpha p(z)| \tag{۴۷.۲}$$

حال برای $|z| = ۱$ داریم:

$$\begin{aligned}|D_\alpha p(z)| + |S(z)| &= |np(z) + (\alpha - z)p'(z)| + |nq(z) + (\alpha - z)q'(z)|\\ &\geq |\alpha p'(z)| - |np(z) - zp'(z)| + |\alpha q'(z)| - |nq(z) - zq'(z)|\\ &= |\alpha||p'(z)| - |np(z) - zp'(z)| + |\alpha||np(z) - zp'(z)| - |p'(z)|\\ &= (|\alpha| - ۱)(|p'(z)| + |np(z) - zp'(z)|)\\ &\geq (|\alpha| - ۱)n|p(z)|\end{aligned}$$

پس

$$|D_\alpha p(z)| + |S(z)| \geq (|\alpha| - ۱)n|p(z)|$$

حال دو طرف (۴۷.۲) را با $|D_\alpha p(z)|$ جمع می‌کنیم و با جایگذاری نامساوی بالا لم اثبات می‌شود.

□

لم زیر از جین [۲۹] است.

لم ۲۳.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq ۱$ قرار داشته باشند، آن‌گاه برای $|z| = ۱$ و $|\alpha_۱| \geq ۱, |\alpha_۲| \geq ۱, ..., |\alpha_k| \geq ۱$ ، $(k < n)$ داریم:*

$$|D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z)| \geq \{\frac{n(n-۱)...(n-k+۱)((|\alpha_۱| - ۱)...(|\alpha_k| - ۱))}{۲^k}\}|p(z)|. \qquad (۴۸.۲)$$

قضیه ۲۴.۱.۲. [۲۹] *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq ۱$ باشند، آن‌گاه برای $|\alpha_۱| \geq ۱, |\alpha_۲| \geq ۱, ..., |\alpha_k| \geq ۱$ ، $(k < n)$ داریم:*

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱} |D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z)| \geq &\{\frac{n(n-۱)...(n-k+۱)}{۲^k}\}\Big[\{(|\alpha_۱| - ۱)...(|\alpha_k| - ۱)\} \max_{|z|=۱} |p(z)|\\ &+ \{۲^k(|\alpha_۱||\alpha_۲|...|\alpha_k|) - ((|\alpha_۱| - ۱)...(|\alpha_k| - ۱))\} \min_{|z|=۱} |p(z)|\Big], \qquad (۴۹.۲)\end{aligned}$$

وقتی که

$$\begin{aligned}&D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_j} p(z) = p_j(z)\\ &= (n - j + ۱)p_{j-۱}(z) + (\alpha_j - z)p'_{j-۱}(z), \qquad j = ۱, ۲, ..., k \qquad (۵۰.۲)\end{aligned}$$

$$p_{\circ}(z) = p(z).$$

برهان. فرض کنیم $m = \min_{|z|=۱} |p(z)|$. اگر $p(z)$ یک صفر روی $|z| = ۱$ داشته باشد، آن‌گاه نتیجه از لم ۲۴.۱.۲ بدست می‌آید. بنابراین فرض کنیم همه صفرهای $p(z)$ در $|z| < ۱$ قرار دارند. از قضیه روشه نتیجه می‌شود که همه صفرهای چندجمله‌ای $F(z) = p(z) - m\beta z^n$ برای $|\beta| < ۱$ نیز در $|z| < ۱$ واقع‌اند، از این رو با به کار بردن لم ۲۳.۱.۲ برای $|\alpha_۱| \geq ۱, |\alpha_۲| \geq ۱, ...|\alpha_k| \geq ۱$ داریم:

$$|D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} F(z)| \geq$$
$$\{\frac{n(n-۱)...(n-k+۱)}{۲^k}\}\{(|\alpha_۱| - ۱)...(|\alpha_k| - ۱)\}|F(z)|$$

بدین معنی که برای $|z| = ۱$

$$|D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z) - \beta m\{n(n-۱)...(n-k+۱)\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k\}z^{n-k}| \geq$$
$$\{\frac{n(n-۱)...(n-k+۱)}{۲^k}\}\{(|\alpha_۱| - ۱)...(|\alpha_k| - ۱)\}(|p(z)| - m|\beta|) \quad (۵۱.۲)$$

اما بنا به لم ۲.۱.۲ همه صفرهای چندجمله‌ای

$$D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} F(z) = D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z)$$
$$- m\beta\{n(n-۱)...(n-k+۱)\alpha_۱\alpha_۲...\alpha_k\}z^{n-k};$$
$$|\alpha_۱| \geq ۱, |\alpha_۲| \geq ۱, ...|\alpha_k| \geq ۱, |\beta| < ۱$$

در $|z| < ۱$ قرار دارند، بنابراین برای $|z| \geq ۱$

$$|D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z)| \geq mn(n-۱)...(n-k+۱)|\alpha_۱||\alpha_۲|...|\alpha_k||z|^{n-k}$$

از نامساوی (۵۱.۲) نتیجه می‌شود که

$$|D_{\alpha_۱} D_{\alpha_۲} ... D_{\alpha_k} p(z)| - m|\beta|n(n-۱)...(n-k+۱)|\alpha_۱||\alpha_۲|...|\alpha_k| \geq$$
$$\{\frac{n(n-۱)...(n-k+۱)}{۲^k}\}\{(|\alpha_۱| - ۱)...(|\alpha_k| - ۱)\}(|p(z)| - m|\beta|)$$
$$|\beta| < ۱, |z| = ۱$$

حال با فرض $|\beta| \to ۱$ و $m = \min_{|z|=۱} |p(z)|$ قضیه اثبات می‌شود.

□

نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای $p(z) = (z-1)^n$ با $\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1, ...\alpha_k \geq 1$ برقرار است. همچنین قضیه ۲۴.۱.۲ تعمیمی از نامساوی (۶.۲) است.

نتیجه ۲۵.۱.۲. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq 1$ واقع باشند، آن‌گاه برای $|\alpha_1| \geq 1, |\alpha_2| \geq 1, ..., |\alpha_k| \geq 1$ ، $(k < n)$ داریم:*

$$\max_{|z|=1} |D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} ... D_{\alpha_k} p(z)| \geq$$
$$\{\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{2^k}\}\{(|\alpha_1|-1)...(|\alpha_k|-1)\} \max_{|z|=1} |p(z)|$$

نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای $p(z) = (z-1)^n$ با $\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1, ...\alpha_k \geq 1$ برقرار است.

فصل ۳

نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی از چندجمله‌ای‌هایی که صفرهایشان در $|z| \leq k$، $k \geq ۱$ قرار دارند

۱.۳ نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی از چندجمله‌ای که صفرهایش در $|z| \leq k$، $k \geq ۱$ قرار دارند

در این فصل به بیان نامساوی‌هایی برای مشتق قطبی از یک چندجمله‌ای که شامل صفرهایش در $|z| \leq k$ ، $k \geq ۱$ باشد می‌پردازیم.

اگرهمه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k$ که $k \geq ۱$ باشند، آن‌گاه گوویل ثابت کرد که

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq \frac{n}{۱+k^n} \left\{ \max_{|z|=۱} |p(z)| + \min_{|z|=k} |p(z)| \right\} \tag{۱.۳}$$

درباره رده عمومی‌تر از چندجمله‌ای‌های $p(z) = a_۰ + \sum_{j=t}^{n} a_j z^j$ ، $۱ \leq t \leq n$ که در $|z| < k$ ، $k \geq ۱$ صفر نمی‌شوند، گاردنر [۱] [۲۱] نامساوی زیر را ثابت کرد

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq \frac{n}{۱+S_۰} \left\{ \max_{|z|=۱} |p(z)| - m \right\} \tag{۲.۳}$$

---

[۱] Gardner

به طوری که $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ و

$$S_0 = k^{t+1} \left\{ \frac{\left((\frac{t}{n}) \left(\frac{|a_t|}{(|a_0| - m)} \right) k^{t-1} + 1 \right)}{\left((\frac{t}{n}) \left(\frac{|a_t|}{(|a_0| - m)} \right) k^{t+1} + 1 \right)} \right\}$$

همچنین به عنوان تعمیمی از نامساوی (۱.۳) دوان [2] [۱۵] برای $n > 2$

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \geq \frac{n}{1+k^n} \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| + \min_{|z|=k} |p(z)| \right\} + (1 - \frac{1}{k^2})|a_1| + \left(\frac{n}{1+k^n} \right) \frac{|a_{n-1}|}{k} \left(\frac{k^n - 1}{n} - \frac{k^{n-2} - 1}{n-2} \right), \tag{۳.۳}$$

و برای $n = 2$

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \geq \frac{n}{1+k^n} \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| + \min_{|z|=k} |p(z)| \right\} + \left(\frac{k^n - 1}{k^n + 1} \right) |a_1|. \tag{۴.۳}$$

را اثبات کرد.

لم ۱.۱.۳. *اگر $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z| < 1$ نداشته باشد، آن‌گاه برای $R \geq 1$ وقتی $n > 2$ داریم:*

$$\max_{|z|=R\geq 1} |p(z)| \leq \left(\frac{R^n + 1}{2} \right) \max_{|z|=1} |p(z)| - \left(\frac{R^n - 1}{2} \right) \min_{|z|=1} |p(z)| - |a_1| \left(\frac{R^n - 1}{2} - \frac{R^{n-2} - 1}{n-2} \right), \tag{۵.۳}$$

و وقتی $n = 2$ داریم:

$$\max_{|z|=R\geq 1} |p(z)| \leq \left(\frac{R^n + 1}{2} \right) \max_{|z|=1} |p(z)| - \left(\frac{R^n - 1}{2} \right) \min_{|z|=1} |p(z)| - |a_1| \frac{(R-1)^2}{2}. \tag{۶.۳}$$

لم بالا حالتی خاص از نتیجه‌ای از گوویل [۲۳] برای $S = 1$ و $k = 1$ است.

لم ۲.۱.۳. [۲۰] *اگر $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه برای $R \geq 1$ وقتی $n \geq 2$ داریم:*

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=1} |p(z)| - (R^n - R^{n-2})|p(0)|, \tag{۷.۳}$$

و وقتی $n = 1$ داریم:

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R \max_{|z|=1} |p(z)| - (R-1)|p(0)|. \tag{۸.۳}$$

[2] Dewan

لم ۳.۱.۳. *اگر* $p(z) = \prod_{j=۱}^{n}(z - z_j)$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *با* $|z_j| \geq k_j \geq ۱$ ، $۱ \leq j \leq n$ *باشد، آن‌گاه برای* $|z| = ۱$ *داریم:*

$$|\frac{q'(z)}{p'(z)}| \geq ۱ + \frac{۱}{\sum_{j=۱}^{n}(\frac{۱}{k_j - ۱})} \tag{۹.۳}$$

به طوری که $q(z) = z^n\overline{p(\frac{۱}{\bar{z}})}$.

قضیه ۴.۱.۳. [۳۳] *اگر* $p(z)$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq ۱$ *واقع باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *با* $|\alpha| \geq ۱$ *داریم:*

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq \frac{n}{۲}\left\{(|\alpha| - ۱)\max_{|z|=۱}|p(z)| + (|\alpha| + ۱)\min_{|z|=۱}|p(z)|\right\}. \tag{۱۰.۳}$$

قضیه ۵.۱.۳. [۳۳] *اگر* $p(z) = \sum_{j=\circ}^{n} a_j z^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k$ *که* $k \geq ۱$ *واقع باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *که* $|\alpha| \geq k$ *وقتی* $n > ۲$ *داریم:*

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| &\geq \frac{n}{۱ + k^n}\left\{(|\alpha| - k)\max_{|z|=۱}|p(z)| + \left(|\alpha| + \frac{۱}{k^{n-۱}}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\right\}\\ &+ n\left(\frac{|\alpha| - k}{۱ + k^n}\right)\frac{|a_{n-۱}|}{k}\left(\frac{k^n - ۱}{n} - \frac{k^{n-۲} - ۱}{n - ۲}\right) + (۱ - \frac{۱}{k^۲})|na_\circ + \alpha a_۱|,\end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

وقتی $n = ۲$ *داریم:*

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| &\geq \frac{n}{۱ + k^n}\left\{(|\alpha| - k)\max_{|z|=۱}|p(z)| + \left(|\alpha| + \frac{۱}{k^{n-۱}}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\right\}\\ &+ n\left(\frac{|\alpha| - k}{۱ + k^n}\right)\frac{|a_۱|}{۲k}(k - ۱)^۲ + (۱ - \frac{۱}{k})|na_\circ + \alpha a_۱|.\end{aligned} \tag{۱۲.۳}$$

برهان. ابتدا نامساوی (۱۱.۳) را اثبات می‌کنیم. از آن جایی که همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k$ که $k \geq ۱$ قرار دارند، بنابراین همه صفرهای چندجمله‌ای $G(z) = p(kz)$ در $|z| \leq ۱$ واقع‌اند. با به کار بردن نامساوی (۱۰.۳) برای چندجمله‌ای $G(z)$ و با توجه به این‌که $\frac{|\alpha|}{k} \geq ۱$ داریم:

$$\max_{|z|=۱} |D_{\frac{\alpha}{k}} G(z)| \geq \frac{n}{۲}\Big\{ \Big(\frac{|\alpha|}{k} - ۱\Big) \max_{|z|=۱} |G(z)| + \Big(\frac{|\alpha|}{k} + ۱\Big) \min_{|z|=۱} |G(z)|\Big\}$$
$$= \frac{n}{۲}\Big\{ \Big(\frac{|\alpha| - k}{k}\Big) \max_{|z|=۱} |G(z)| + \Big(\frac{|\alpha| + k}{k}\Big) \min_{|z|=۱} |G(z)|\Big\}$$

به طوری که نتیجه می‌دهد

$$\max_{|z|=۱} |np(kz) + (\frac{\alpha}{k} - z)kp'(kz)| \geq \frac{n}{۲}\left\{ \left(\frac{|\alpha| - k}{k}\right) \max_{|z|=۱} |p(kz)| + \left(\frac{|\alpha| + k}{k}\right) \min_{|z|=۱} |p(kz)|\right\}$$

لذا داریم:

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \geq \frac{n}{۲}\left\{ \left(\frac{|\alpha| - k}{k}\right) \max_{|z|=k} |p(z)| + \left(\frac{|\alpha| + k}{k}\right) \min_{|z|=k} |p(z)|\right\}. \qquad (۱۳.۳)$$

همچنین از آن جایی که همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k$، $k \geq ۱$ واقع‌اند، بنابراین همه صفرهای چندجمله‌ای $T(z) = z^n p(\frac{۱}{z})$ در $|z| \geq \frac{۱}{k}$ واقع‌اند و لذا چندجمله‌ای $T(\frac{z}{k})$ از درجه ۲ $n >$ است و همه صفرهایش در $|z| \geq ۱$ واقع‌اند. با به کار بردن لم ۱.۱.۳ برای مورد ۲ $n >$ برای چندجمله‌ای $T(\frac{z}{k})$ برای $k \geq ۱$ داریم:

$$\max_{|z|=k} |T(\frac{z}{k})| \leq \left(\frac{k^n + ۱}{۲}\right) \max_{|z|=۱} |T(\frac{z}{k})| - \left(\frac{k^n - ۱}{۲}\right) \min_{|z|=۱} |T(\frac{z}{k})|$$
$$- \frac{|a_{n-۱}|}{k}\left(\frac{k^n - ۱}{n} - \frac{k^{n-۲} - ۱}{n - ۲}\right)$$

که معادل است با

$$\max_{|z|=k} |p(z)| \geq \frac{۲k^n}{۱ + k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \left(\frac{k^n - ۱}{k^n + ۱}\right) \min_{|z|=k} |p(z)|$$
$$+ \frac{۲|a_{n-۱}|k^{n-۱}}{۱ + k^n}\left(\frac{k^n - ۱}{n} - \frac{k^{n-۲} - ۱}{n - ۲}\right). \qquad (۱۴.۳)$$

همچنین از آن جایی که $p(z)$ از درجه ۲ $n >$ است ، $D_\alpha p(z)$ از درجه $n - ۱$ که ۲ $n - ۱ \geq$ است و با به کار بردن نامساوی (۷.۳) از لم ۲.۱.۳ برای چندجمله‌ای $D_\alpha p(z)$ برای $k \geq ۱$ داریم:

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \leq k^{n-۱} \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| - (k^{n-۱} - k^{n-۳})|D_\alpha p(۰)|$$

یا

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \leq k^{n-۱} \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| - (k^{n-۱} - k^{n-۳})|na_۰ + \alpha a_۱|. \qquad (۱۵.۳)$$

با استفاده از نامساوی‌های (۱۴.۳) و (۱۵.۳) در (۱۳.۳) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
k^{n-۱}\Big\{\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| - (۱-\frac{۱}{k^۲})|na_۰+\alpha a_۱|\Big\} &\geq \max_{|z|=k}|D_\alpha p(z)| \\
&\geq \frac{n}{۲}\Big\{\left(\frac{|\alpha|-k}{k}\right)\max_{|z|=k}|p(z)| + \left(\frac{|\alpha|+k}{k}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\Big\} \\
&\geq \frac{n}{۲}\left(\frac{|\alpha|-k}{k}\right)\Big\{\frac{۲k^n}{۱+k^n}\max_{|z|=۱}|p(z)| + \left(\frac{k^n-۱}{k^n+۱}\right)\min_{|z|=k}|p(z)| \\
&+ \frac{۲|a_{n-۱}|k^{n-۱}}{۱+k^n}\left(\frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right)\Big\} + \frac{n}{۲}\left(\frac{|\alpha|+k}{k}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|,
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| &\geq \frac{n}{۱+k^n}\Big\{(|\alpha|-k)\max_{|z|=۱}|p(z)| + \left(|\alpha|+\frac{۱}{k^{n-۱}}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\Big\} \\
&+ n\left(\frac{|\alpha|-k}{۱+k^n}\right)\frac{|a_{n-۱}|}{k}\left(\frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right) + (۱-\frac{۱}{k^۲})|na_۰+\alpha a_۱|,
\end{aligned}$$

لذا نامساوی (۱۱.۳) اثبات می‌شود. اثبات نامساوی (۱۲.۳) مانند نامساوی (۱۱.۳) است با این تفاوت که به جای نامساوی (۷.۳) از لم ۲.۱.۳ از نامساوی (۸.۳) استفاده می‌کنیم. هم‌چنین در لم ۱.۱.۳ از نامساوی (۶.۳) برای چندجمله‌ای‌های از درجه ۲ استفاده می‌کنیم. □

ملاحظه ۶.۱.۳. *نامساوی‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) نامساوی‌های (۳.۳) و (۴.۳) را بهبود بخشیده‌اند به این معنی که کران‌های بدست آمده در این نامساوی‌ها را با اضافه کردن ضرایب $a_۰$ و $a_۱$ بهبود بخشیده‌ایم. با تقسیم کردن دو طرف نامساوی‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) بر $|\alpha|$ فرض $|\alpha| \to \infty$ به ترتیب نامساوی‌های (۳.۳) و (۴.۳) را بدست می‌آوریم.*

ملاحظه ۷.۱.۳. *برای $k=۱$ قضیه قبل به نامساوی (۱۰.۳) قضیه ۴.۱.۳ تبدیل می‌شود.*

قضیه ۸.۱.۳. [۳۳] *اگر $p(z)=\prod_{j=۱}^{n}(z-z_j)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $|z_j| \leq k_j \leq ۱$ ، $۱ \leq j \leq n$ ، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $|\alpha| \geq t_۰$ داریم:*

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq n\left(\frac{|\alpha|-t_۰}{۱+t_۰}\right)\max_{|z|=۱}|p(z)|, \tag{۱۶.۳}$$

به طوری که $t_۰ = ۱ - \dfrac{n}{\sum_{j=۱}^{n}(\frac{۱}{۱-k_j})}$ است.

برهان. فرض کنیم $q(z)=z^n\overline{p(\frac{۱}{\bar z})}$، در این صورت برای $|z|=۱$ داریم:

$$|q'(z)| = |np(z)-zp'(z)| \tag{۱۷.۳}$$

همچنین برای $۱ \leq j \leq n$، $|z_j| \leq k_j \leq ۱$، بنابراین برای $۱ \leq j \leq n$، $\frac{۱}{|z_j|} \geq \frac{۱}{k_j} \geq ۱$ و لذا برای $|z| = ۱$ بنا به لم ۳.۱.۳ داریم:

$$|\frac{p'(z)}{q'(z)}| \geq ۱ + \frac{n}{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{k_j}{۱-k_j}\right)} = \frac{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{k_j}{۱-k_j}+۱\right)}{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{k_j}{۱-k_j}\right)} = \frac{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۱-k_j}\right)}{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{k_j}{۱-k_j}\right)}$$

که برای $|z| = ۱$ نتیجه می‌دهد

$$|\frac{q'(z)}{p'(z)}| \leq \frac{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{k_j}{۱-k_j}\right)}{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۱-k_j}\right)} = \frac{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۱-k_j}-۱\right)}{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۱-k_j}\right)} = ۱ - \frac{۱}{\sum_{j=۱}^{n}\left(\frac{۱}{۱-k_j}\right)} = t_\circ$$

بنابراین برای $|z| = ۱$ داریم:

$$|q'(z)| \leq t_\circ |p'(z)| \qquad (۱۸.۳)$$

حال به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| \geq t_\circ$ داریم:

$$|D_\alpha p(z)| = |np(z) + (\alpha - z)p'(z)| \geq |\alpha||p'(z)| - |np(z) - zp'(z)|$$

به طوری که از (۱۷.۳) و (۱۸.۳) برای $|z| = ۱$ داریم:

$$|D_\alpha p(z)| \geq |\alpha||p'(z)| - t_\circ |p'(z)| = (|\alpha| - t_\circ)|p'(z)| \qquad (۱۹.۳)$$

همچنین از (۱۷.۳) برای $|z| = ۱$ داریم:

$$|q'(z)| = |np(z) - zp'(z)| \geq n|p(z)| - |p'(z)|$$

یا

$$|p'(z)| + |q'(z)| \geq n|p(z)|$$

از (۱۸.۳) برای $|z| = ۱$ بدست می‌آوریم:

$$(۱ + t_\circ)|p'(z)| \geq n|p(z)|$$

یا

$$|p'(z)| \geq \frac{n}{۱ + t_\circ}|p(z)|$$

این نامساوی در ترکیب با (۱۹.۳) نتیجه می‌دهد

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq n\left(\frac{|\alpha| - t_\circ}{۱ + t_\circ}\right) \max_{|z|=۱} |p(z)|$$

به طوری که قضیه ۸.۱.۳ را اثبات می‌کند. □

نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای $p(z) = (z-k)^n$ که $\alpha \geq k$ برقرار است.

ملاحظه ۹.۱.۳. *با تقسیم هر دو طرف از نامساوی (۱۶.۳) بر $|\alpha|$ و $|\alpha| \to \infty$ داریم:*

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq \frac{n}{۱+t_۰} \max_{|z|=۱} |p(z)| \qquad (۲۰.۳)$$

با قرار دادن مقدار $t_۰$ در (۲۰.۳) و بعد از ساده سازی داریم:

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq \frac{n}{۲} \left\{ ۱ + \frac{۱}{۱ + \frac{۲}{n} \sum_{j=۱}^{n} \frac{k_j}{۱-k_j}} \right\} \max_{|z|=۱} |p(z)|.$$

قضیه ۱۰.۱.۳. [۱۲] *فرض کنیم $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و همه صفرهایش در $|z| \leq k$ ، $k \geq ۱$ قرار داشته باشند، در این صورت برای $|\alpha| \geq k$ داریم:*

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq n(|\alpha| - k) \left\{ \frac{۱}{۱+k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{۱}{۲k^n} \left(\frac{k^n - ۱}{k^n + ۱} \right) m \right\} \qquad (۲۱.۳)$$

به طوری که $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ است.

لم ۱۱.۱.۳. *اگر همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq ۱$ قرار داشته باشند، آن‌گاه به ازای هر $|\alpha| \geq ۱$ وقتی که $m = \min_{|z|=۱} |p(z)|$ داریم:*

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq \frac{n}{۲} \left\{ (|\alpha| - ۱) \max_{|z|=۱} |p(z)| + (|\alpha| + ۱) m \right\}. \qquad (۲۲.۳)$$

این لم از عزیز و رادر [۳] [۸] است.

لم ۱۲.۱.۳. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq k$ که $k \geq ۱$ باشند، آن‌گاه*

$$\max_{|z|=k} |p(z)| \geq \frac{۲k^n}{۱+k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)|. \qquad (۲۳.۳)$$

نامساوی (۲۳.۳) بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای $p(z) = z^n + k^n$ برقرار است. این لم از عزیز [۹] است.

لم ۱۳.۱.۳. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه برای $R \geq ۱$ و $n > ۲$ داریم:*

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=۱} |p(z)| - \frac{۲(R^n - ۱)}{n+۲} |p(۰)| - \left[\frac{R^n - ۱}{n} - \frac{R^{n-۲} - ۱}{n-۲} \right] |p'(۰)|, \qquad (۲۴.۳)$$

و برای $n = ۲$ داریم:

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R^۲ \max_{|z|=۱} |p(z)| - \frac{(R-۱)}{۲} \left[(R+۱)|p(۰)| + (R-۱)|p'(۰)| \right]. \qquad (۲۵.۳)$$

[۳] Rather

این لم از دوان [۱۶] است.

لم ۱۴.۱.۳. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n\geq ۳$ باشد که هیچ صفری در $|z|<۱$ نداشته باشد و $m=\min_{|z|=۱}|p(z)|$، آن‌گاه برای $R\geq ۱$ و $n>۳$ داریم:*

$$\max_{|z|=R}|p(z)|\leq\left(\frac{R^n+۱}{۲}\right)\max_{|z|=۱}|p(z)|-\left(\frac{R^n-۱}{۲}\right)m-|p'(\circ)|\frac{۲}{(n+۱)}\left\{\frac{R^n-۱}{n}-(R-۱)\right\}$$
$$-|p''(\circ)|\left\{\left(\frac{(R^n-۱)-n(R-۱)}{n(n-۱)}\right)-\left(\frac{(R^{n-۲}-۱)-(n-۲)(R-۱)}{(n-۲)(n-۳)}\right)\right\},\tag{۲۶.۳}$$

و برای $n=۳$ داریم:

$$\max_{|z|=R}|p(z)|\leq\left(\frac{R^n+۱}{۲}\right)\max_{|z|=۱}|p(z)|-\left(\frac{R^n-۱}{۲}\right)m$$
$$-|p'(\circ)|\frac{۲}{n+۱}\left\{\frac{R^n-۱}{n}-(R-۱)\right\}$$
$$-|p''(\circ)|\frac{(R-۱)^n}{n(n-۱)}.\tag{۲۷.۳}$$

این لم هم از دوان [۱۷] است.

قضیه ۱۵.۱.۳. [۱۲] *اگر $p(z)=\sum_{j=\circ}^{n}a_jz^j$ یک چندجمله‌ای از درجه $n\geq ۳$ باشد که همه صفرهایش در $|z|\leq k$، $k\geq ۱$ واقع باشند، آن‌گاه برای $|\alpha|\geq k$ و برای $n>۳$ داریم:*

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)|$$
$$\geq n(|\alpha|-k)\left\{\frac{۱}{k^n+۱}\max_{|z|=۱}|p(z)|+\frac{k^n-۱}{۲k^n(k^n+۱)}m\right.$$
$$+\frac{۲|a_{n-۱}|}{k(k^n+۱)(n+۱)}\left(\frac{k^n-۱}{n}-(k-۱)\right)$$
$$\left.+\frac{۲|a_{n-۲}|}{(k^n+۱)k^۲}\left(\left(\frac{(k^n-۱)-n(k-۱)}{n(n-۱)}\right)-\left(\frac{(k^{n-۲}-۱)-(n-۲)(k-۱)}{(n-۲)(n-۳)}\right)\right)\right\}$$
$$+\frac{۱}{k^{n-۱}}\left\{\frac{k^{n-۱}-۱}{n-۱}-\frac{k^{n-۳}-۱}{n-۳}\right\}|(n-۱)a_۱+۲\alpha a_۲|$$
$$+\frac{۲}{k^{n-۱}}\left(\frac{k^{n-۱}-۱}{n+۱}\right)|na_\circ+\alpha a_۱|+n\frac{(|\alpha|+k)}{۲k^n}m,\tag{۲۸.۳}$$

برای $n = ۳$ *وقتی که* $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ *داریم:*

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq n(|\alpha| - k)\Bigg\{\frac{۱}{k^n + ۱} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{k^n - ۱}{۲k^۳(k^n + ۱)} m + \frac{۲|a_{n-۱}|}{k(k^n + ۱)(n + ۱)} \left(\frac{k^n - ۱}{n} - (k - ۱)\right) + \frac{۲k^{n-۵}|a_{n-۲}|}{(k^n + ۱)} \left(\frac{(k - ۱)^n}{n(n - ۱)}\right)\Bigg\} + \frac{k - ۱}{۲k^۲}((k + ۱)|na_۰ + \alpha a_۱| + (k - ۱)|(n - ۱)a_۱ + ۲\alpha a_۲|) + n\frac{(|\alpha| + k)}{۲k^۳} m. \quad (۲۹.۳)$$

برهان. بنا به فرض همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ در $|z| \leq k$ که $k \geq ۱$ قرار دارند، بنابراین همه صفرهای چندجمله‌ای $G(z) = p(kz)$ در $|z| \leq ۱$ واقع‌اند. با به کار بردن لم ۱۱.۱.۳ برای چندجمله‌ای $G(z)$ و با توجه به این که $\frac{|\alpha|}{k} \geq ۱$ داریم:

$$\max_{|z|=۱} |D_{\frac{\alpha}{k}} G(z)| \geq \frac{n}{۲} \left[\left(\frac{|\alpha|}{k} - ۱\right) \max_{|z|=۱} |G(z)| + \left(\frac{|\alpha|}{k} + ۱\right) \min_{|z|=۱} |G(z)|\right] \quad (۳۰.۳)$$

به این صورت که

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \geq \frac{n}{۲} \left[\left(\frac{|\alpha| - k}{k}\right) \max_{|z|=k} |p(z)| + \left(\frac{|\alpha| + k}{k}\right) m\right] \quad (۳۱.۳)$$

چندجمله‌ای $p(z)$ از درجه $n > ۳$ است و لذا $D_\alpha p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n - ۱$ است که $n - ۱ > ۲$ از این رو با به کار بردن لم ۱۳.۱.۳ برای چندجمله‌ای $D_\alpha p(z)$ برای $k \geq ۱$ داریم:

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \leq k^{n-۱} \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| - \frac{۲(k^{n-۱} - ۱)}{n + ۱} |na_۰ + \alpha a_۱| - \left[\frac{k^{n-۱} - ۱}{n - ۱} - \frac{k^{n-۳} - ۱}{n - ۳}\right] |(n - ۱)a_۱ + ۲\alpha a_۲| \quad (۳۲.۳)$$

با ترکیب (۳۱.۳) و (۳۲.۳) برای $k \geq ۱$ بدست می‌آوریم:

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq \frac{n}{۲} \left[\left(\frac{|\alpha| - k}{k^n}\right) \max_{|z|=k} |p(z)| + \left(\frac{|\alpha| + k}{k^n}\right) m\right] + \frac{۲(k^{n-۱} - ۱)}{k^{n-۱}(n + ۱)} |na_۰ + \alpha a_۱| + \frac{۱}{k^{n-۱}} \left[\left(\frac{k^{n-۱} - ۱}{n - ۱}\right) - \left(\frac{k^{n-۳} - ۱}{n - ۳}\right)\right] |(n - ۱)a_۱ + ۲\alpha a_۲|. \quad (۳۳.۳)$$

از آن جایی که همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ در $|z| \leq k$ که $k \geq ۱$ واقع‌اند، چندجمله‌ای $q(z) = z^n p(\frac{۱}{z})$ هیچ صفری در $|z| < \frac{۱}{k}$ ندارد، لذا همه صفرهای چندجمله‌ای $q(\frac{z}{k})$ در $|z| \geq ۱$

قرار دارند، بنابراین با به کار بردن لم ۱۴.۱.۳ برای چندجمله‌ای $q(\frac{z}{k})$ داریم:

$$\begin{aligned}\max_{|z|=k\geq ۱}|q(\frac{z}{k})| \leq & \left(\frac{k^n+۱}{۲}\right)\max_{|z|=۱}|\,q(\frac{z}{k})\,| - \left(\frac{k^n-۱}{۲}\right)\min_{|z|=۱}|\,q(\frac{z}{k})\,| \\ & - \frac{۲|a_{n-۱}|}{(n+۱)k}\left[\frac{k^n-۱}{n}-(k-۱)\right] \\ & - \frac{۲|a_{n-۲}|}{k^۲}\left[\left(\frac{(k^n-۱)-n(k-۱)}{n(n-۱)}\right)-\left(\frac{(k^{n-۲}-۱)-(n-۲)(k-۱)}{(n-۲)(n-۳)}\right)\right].\end{aligned} \tag{۳۴.۳}$$

از آن جایی که $\max_{|z|=۱}|q(\frac{z}{k})| = (\frac{۱}{k^n})\max_{|z|=k}|p(z)|$، نامساوی (۳۴.۳) معادل است با

$$\begin{aligned}\max_{|z|=k}|p(z)| \geq & \left(\frac{۲k^n}{k^n+۱}\right)\max_{|z|=۱}|p(z)| + \left(\frac{k^n-۱}{k^n+۱}\right)m \\ & + \frac{۴k^{n-۱}|a_{n-۱}|}{(k^n+۱)(n+۱)}\left[\frac{k^n-۱}{n}-(k-۱)\right] \\ & + \frac{۴k^{n-۲}|a_{n-۲}|}{k^n+۱}\left[\left(\frac{(k^n-۱)-n(k-۱)}{n(n-۱)}\right)-\left(\frac{(k^{n-۲}-۱)-(n-۲)(k-۱)}{(n-۲)(n-۳)}\right)\right].\end{aligned} \tag{۳۵.۳}$$

با ترکیب نامساوی‌های (۳۳.۳) و (۳۵.۳) نتیجه مورد نظر بدست می‌آید و اثبات نامساوی (۲۸.۳) تکمیل می‌شود. اثبات قضیه در حالتی که $n = ۳$ مانند نامساوی (۲۸.۳) است با این تفاوت که به جای نامساوی‌های (۲۴.۳) و (۲۶.۳) از نامساوی‌های (۲۵.۳) و (۲۷.۳) استفاده می‌کنیم. □

صحت این موضوع ساده است که برای $n > ۳$ اگر $k \geq ۱$، آن‌گاه

$$\frac{(k^n-۱)}{n-(k-۱)} \geq ۰,$$

$$\left[\frac{(k^{n-۱}-۱)}{(n-۱)}-\frac{(k^{n-۳}-۱)}{(n-۳)}\right] \geq ۰$$

و

$$\left[(\frac{((k^n-۱)-n(k-۱))}{n(n-۱)})-(\frac{((k^{n-۲}-۱)-(n-۲)(k-۱))}{(n-۲)(n-۳)})\right] \geq ۰.$$

بنابراین برای چندجمله‌ای از درجه $n \geq ۳$ قضیه ۱۵.۱.۳ تعمیمی از قضیه ۱۰.۱.۳ است. با تقسیم هر دو طرف از نامساوی‌های (۲۸.۳) و (۲۹.۳) بر $|\alpha|$ و $|\alpha| \to \infty$ نتیجه بعد را بدست می‌آوریم.

نتیجه ۱۶.۱.۳. *اگر* $p(z) = \sum_{j=\circ}^{n} a_j z^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه* $n \geq ۳$ *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k$ *،* $k \geq ۱$ *باشند و* $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$*، آن‌گاه برای* $n > ۳$ *داریم:*

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq & \frac{n}{k^n + ۱}\left\{ \max_{|z|=۱} |p(z)| + m + \frac{n}{k(n+۱)} \left(\frac{k^n - ۱}{n} - (k-۱) \right) |a_{n-۱}| \right. \\ & \left. + \frac{۲}{k^۲} \left(\frac{(k^n-۱) - n(k-۱)}{n(n-۱)} - \frac{(k^{n-۲}-۱) - (n-۲)(k-۱)}{(n-۲)(n-۳)} \right) |a_{n-۲}| \right\} \\ & \times \frac{۲(k^{n-۱}-۱)}{k^{n-۱}(n+۱)} |a_۱| + \frac{۲}{k^{n-۱}} \left\{ \frac{k^{n-۱}-۱}{n-۱} - \frac{k^{n-۳}-۱}{n-۳} \right\} |a_۲|,\end{aligned}$$

و برای $n = ۳$ *داریم:*

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq & \frac{n}{k^n + ۱}\left\{ \max_{|z|=۱} |p(z)| + m + \frac{۲}{k(n+۱)} \left(\frac{k^n - ۱}{n} - (k-۱) \right) |a_{n-۱}| \right. \\ & \left. + \frac{۲}{k^۲} \left(\frac{(k-۱)^n}{n(n-۱)} \right) |a_{n-۲}| \right\} + \frac{k-۱}{۲k^۲} ((k+۱)|a_۱| + ۲(k-۱)|a_۲|).\end{aligned}$$

هر دو نامساوی این نتیجه بهبودیافته هستند و تساوی برای $p(z) = z^n + k^n$ برقرار است.

قضیه ۱۷.۱.۳. [۱۸] *اگر همه صفرهای چندجمله‌ای* $p(z) = \sum_{j=\circ}^{n} a_j z^j$ *در* $|z| \leq k$ *که* $k \geq ۱$ *باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *که* $|\alpha| \geq k$ *داریم:*

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - k}{۱ + k^n} \right) \max_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۳۶.۳}$$

کران در این قضیه فقط به ریشه قدرمطلق بزرگ‌تر وابسته است و به بقیه صفرها حتی برخی از آن‌ها که به مبدا نزدیک‌تراند بستگی ندارد. بنابراین بدست آوردن کرانی که وابسته به موقعیت همه صفرهای یک چندجمله‌ای باشد قابل توجه خواهد بود.

لم ۱۸.۱.۳. *اگر* $p(z)$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد، آن‌گاه به ازای هر* $R \geq ۱$ *داریم:*

$$\max_{|z|=R} |p(z)| \leq R^n \max_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۳۷.۳}$$

این لم نتیجه‌ای از اصل ماکسیمم قدرمطلق است.

لم ۱۹.۱.۳. *اگر* $p(z) = a_n \prod_{j=۱}^{n} (z - z_j)$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد به طوری که برای* $۱ \leq j \leq n$ *،* $|z_j| \leq ۱$*، آن‌گاه*

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \geq \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{۱ + |z_j|} \max_{|z|=۱} |p(z)|. \tag{۳۸.۳}$$

لم بالا از گیروکس، رحمان و چمیزر [۲۲] می‌باشد.

لم ۲۰.۱.۳. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq k$ که $k \geq ۱$ قرار داشته باشند، آن‌گاه*

$$\max_{|z|=k} |p(z)| \geq \frac{۲k^n}{۱+k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{k^n - ۱}{۱+k^n} \min_{|z|=k} |p(z)|. \tag{۳۹.۳}$$

برهان. برای $k = ۱$ اثبات کامل است. بنابراین کافی‌ست مورد $k > ۱$ را بررسی کنیم. فرض کنیم $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$، آن‌گاه برای $|z| = k$ ، $m \leq |p(z)|$. از آن جایی که همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k$ که $k > ۱$ واقع‌اند، بنا به قضیه روشه به ازای هر λ که $|\lambda| < ۱$ همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z)+\lambda m$ نیز در $|z| \leq k$ ، $k > ۱$ قرار دارند. با به کار بردن لم ۱۲.۱.۳ برای چندجمله‌ای $p(z) + \lambda m$ داریم:

$$\max_{|z|=k} |p(z) + \lambda m| \geq \frac{۲k^n}{۱+k^n} \max_{|z|=۱} |p(z) + \lambda m|$$

با انتخاب آرگومانی از λ به طوری که $|p(z) + \lambda m| = |p(z)| + |\lambda| m$ و $|\lambda| \to ۱$ داریم:

$$\max_{|z|=k} |p(z)| \geq \frac{۲k^n}{۱+k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{k^n - ۱}{۱+k^n} \min_{|z|=k} |p(z)|$$

لذا اثبات لم کامل می‌شود. □

قضیه ۲۱.۱.۳. [۱۸] *اگر $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j = a_n \prod_{j=۱}^{n} (z - z_j)$ ، $a_n \neq ۰$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که برای $۱ \leq j \leq n$ ، $|z_j| \leq k_j$ و $k = \max(k_۱, k_۲, ..., k_n) \geq ۱$، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط $|\alpha| \geq k$ داریم:*

$$\begin{aligned} \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{j=۱}^{n} \frac{k}{k + k_j} \Bigg\{ & \frac{۲}{۱+k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)| \\ & + \frac{۱}{k^n} \left(\frac{k^n - ۱}{k^n + ۱} \right) \min_{|z|=k} |p(z)| \Bigg\}. \end{aligned} \tag{۴۰.۳}$$

برهان. فرض کنیم $G(z) = p(kz)$ باشد. برای $۱ \leq j \leq n$ ، z_j ها صفرهای $p(z)$ هستند و برای $۱ \leq j \leq n$، $\frac{z_j}{k}$ ها صفرهای $G(z)$ هستند، و چون همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k$ واقع‌اند، همه صفرهای $G(z)$ نیز در $|z| \leq ۱$ واقع‌اند، بنابراین با بکار بردن لم ۱۹.۱.۳ برای چندجمله‌ای $G(z)$ داریم:

$$\max_{|z|=۱} |G'(z)| \geq \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{۱ + \frac{|z_j|}{k}} \max_{|z|=۱} |G(z)| \tag{۴۱.۳}$$

فرض کنیم $H(z) = z^n \overline{G(\frac{۱}{\bar{z}})}$. در این صورت به سادگی می توان اثبات کرد که برای $|z| = ۱$ داریم:

$$|H'(z)| = |nG(z) - zG'(z)| \tag{۴۲.۳}$$

همه صفرهای چندجمله‌ای $H(z)$ در $|z| \geq ۱$ قرار دارند و برای $|z| = ۱$ ، $|H(z)| = |G(z)|$. بنابراین بنا به نتیجه‌ای از بروجن [۱۳] برای $|z| = ۱$ داریم:

$$|H'(z)| \leq |G'(z)| \qquad (۴۳.۳)$$

حال به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| \geq k$ داریم:

$$\begin{aligned}|D_{\frac{\alpha}{k}} G(z)| &= |nG(z) - zG'(z) + \frac{\alpha}{k}G'(z)| \\ &\geq |\frac{\alpha}{k}||G'(z)| - |nG(z) - zG'(z)|\end{aligned}$$

این نامساوی با استفاده از (۴۲.۳) و (۴۳.۳) نتیجه می‌دهد:

$$\max_{|z|=۱} |D_{\frac{\alpha}{k}} G(z)| \geq \frac{|\alpha| - k}{k} \max_{|z|=۱} |G'(z)| \qquad (۴۴.۳)$$

با استفاده از (۴۱.۳) در (۴۴.۳) داریم:

$$\max_{|z|=۱} |D_{\frac{\alpha}{k}} G(z)| \geq \frac{|\alpha| - k}{k} \sum_{j=۱}^{n} \frac{k}{k + |z_j|} \max_{|z|=۱} |G(z)|$$

با جایگزینی $p(kz)$ به جای $G(z)$ داریم:

$$\max_{|z|=۱} |D_{\frac{\alpha}{k}} p(kz)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{k + |z_j|} \max_{|z|=۱} |p(kz)|$$

لذا

$$\max_{|z|=۱} |np(kz) + (\frac{\alpha}{k} - z)kp'(kz)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{k + |z_j|} \max_{|z|=۱} |p(kz)|$$

در نتیجه داریم:

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{k + |z_j|} \max_{|z|=k} |p(z)|$$

از لم ۲۰.۱.۳ در نامساوی بالا استفاده می‌کنیم پس:

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{k + |z_j|} \left\{ \frac{۲k^n}{۱ + k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \left(\frac{k^n - ۱}{۱ + k^n}\right) \min_{|z|=k} |p(z)| \right\} \qquad (۴۵.۳)$$

از آن جایی که $D_\alpha p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n - ۱$ است و $k \geq ۱$، لم ۱۸.۱.۳ را برای چندجمله‌ای $D_\alpha p(z)$ به کار می‌بریم لذا

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \leq k^{n-۱} \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)|. \qquad (۴۶.۳)$$

با ترکیب نامساوی‌های (۴۵.۳) و (۴۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
&\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)| \\
&\geq (|\alpha|-k)\sum_{j=1}^{n}\frac{k}{k+|z_j|}\left[\frac{2}{1+k^n}\max_{|z|=1}|p(z)|+\frac{1}{k^n}\left(\frac{k^n-1}{1+k^n}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\right] \\
&\geq (|\alpha|-k)\sum_{j=1}^{n}\frac{k}{k+k_j}\left[\frac{2}{1+k^n}\max_{|z|=1}|p(z)|+\frac{1}{k^n}\left(\frac{k^n-1}{1+k^n}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\right].
\end{aligned}$$

که نتیجه مورد نظر است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

با تقسیم هر دو طرف از نامساوی (۴۰.۳) بر $|\alpha|$ و $|\alpha| \to \infty$ تعمیم زیر را که نتیجه‌ای از عزیز [۹] است بدست می‌آوریم.

نتیجه ۲۲.۱.۳. *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j=a_n\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$ ، $a_n \neq 0$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *و* $|z_j| \leq k_j$ ، $1 \leq j \leq n$ *که* $k=\max(k_1,k_2,...,k_n) \geq 1$ *، آن‌گاه*

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \sum_{j=1}^{n}\frac{k}{k+k_j}\left[\frac{2}{1+k^n}\max_{|z|=1}|p(z)|+\frac{1}{k^n}\left(\frac{k^n-1}{k^n+1}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\right]$$

برای $1 \leq j \leq n$ ، $\frac{k}{k+k_j} \geq \frac{1}{2}$ پس قضیه ۲۱.۱.۳ نتیجه بعد را نتیجه می‌دهد که بهبودی از قضیه ۱۷.۱.۳ است.

نتیجه ۲۳.۱.۳. *اگر* $p(z)=a_n\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$ ، $a_n \neq 0$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k$ ، $k \geq 1$ *واقع باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* $|\alpha| \geq k$ *داریم:*

$$\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)| \geq n(|\alpha|-k)\left[\frac{1}{1+k^n}\max_{|z|=1}|p(z)|+\frac{1}{2k^n}\left(\frac{k^n-1}{k^n+1}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\right].$$

نتیجه ۲۴.۱.۳. *اگر* $p(z)=a_n\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$ ، $a_n \neq 0$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k$ ، $k \geq 1$ *واقع باشند، آن‌گاه*

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq n\left[\frac{1}{1+k^n}\max_{|z|=1}|p(z)|+\frac{1}{2k^n}\left(\frac{k^n-1}{k^n+1}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\right].$$

قضیه ۲۵.۱.۳. [۱۸] *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j=a_n\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$ ، $a_n \neq 0$ *یک چندجمله‌ای از درجه* $n \geq 2$ *و* $|z_j| \leq k_j$ ، $1 \leq j \leq n$ *که* $k=\max(k_1,k_2,...,k_n) \geq 1$ *، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی*

یا مختلط $|\alpha| \geq k$ برای $n > ۲$ داریم:

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{j=۱}^{n} \frac{k}{k+k_j} \Bigg\{ \frac{۲}{۱+k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{۱}{k^n} \left(\frac{k^n - ۱}{k^n + ۱} \right) \times \min_{|z|=k} |p(z)| + \frac{۲|a_{n-۱}|}{k(۱+k^n)} \left(\frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲} \right) \Bigg\} + \left(۱ - \frac{۱}{k^۲}\right) |na_۰ + \alpha a_۱|, \tag{۴۷.۳}$$

و برای $n = ۲$ داریم:

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{j=۱}^{n} \frac{k}{k+k_j} \Bigg\{ \frac{۲}{۱+k^n} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{۱}{k^n} \left(\frac{k^n - ۱}{k^n + ۱} \right) \times \min_{|z|=k} |p(z)| + |a_۱| \frac{(k-۱)^n}{k(۱+k^n)} \Bigg\} + \left(۱ - \frac{۱}{k}\right) |na_۰ + \alpha a_۱|. \tag{۴۸.۳}$$

برهان. فرض کنیم $G(z) = p(kz)$. برای $۱ \leq j \leq n$ ، z_j ها صفرهای $p(z)$ هستند و برای $۱ \leq j \leq n$ ، $\frac{z_j}{k}$ ها نیز صفرهای $G(z)$ هستند. چون همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k$ واقع‌اند، همه صفرهای $G(z)$ نیز در $|z| \leq ۱$ قرار دارند، بنابراین با به کار بردن لم ۱۹.۱.۳ برای چندجمله‌ای $G(z)$ و ادامه روند اثبات مشابه قضیه ۲۱.۱.۳ بدست می‌آوریم:

$$\max_{|z|=k} |D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - k) \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{k+|z_j|} \max_{|z|=k} |p(z)|. \tag{۴۹.۳}$$

حال فرض کنیم $q(z) = z^n p(\frac{۱}{z})$ چندجمله‌ای معکوس $p(z)$ باشد. از آن جایی که همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ در $|z| \leq k$ ، $k \geq ۱$ واقع‌اند پس همه صفرهای چندجمله‌ای $q(\frac{z}{k})$ در $|z| \geq ۱$ واقع‌اند. لذا نامساوی (۵.۳) از لم ۱.۱.۳ را برای چندجمله‌ای $q(\frac{z}{k})$ ، $k \geq ۱$ به کار می‌بریم پس

$$\max_{|z|=k} |q(\frac{z}{k})| \leq \frac{k^n+۱}{۲} \max_{|z|=۱} |q(\frac{z}{k})| - \left(\frac{k^n-۱}{۲}\right) \min_{|z|=۱} |q(\frac{z}{k})| - \frac{|a_{n-۱}|}{k} \left(\frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲} \right),$$

در نتیجه

$$\max_{|z|=۱} |p(z)| \leq \frac{k^n+۱}{۲k^n} \max_{|z|=k} |p(z)| - \left(\frac{k^n-۱}{۲k^n}\right) \min_{|z|=k} |p(z)| - \frac{|a_{n-۱}|}{k} \left(\frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲} \right),$$

این نامساوی معادل است با

$$\max_{|z|=k}|p(z)| \geq \frac{۲k^n}{۱+k^n}\max_{|z|=۱}|p(z)| + \left(\frac{k^n-۱}{۱+k^n}\right)\min_{|z|=k}|p(z)| + \frac{۲|a_{n-۱}|k^{n-۱}}{۱+k^n}\left(\frac{k^n-۱}{n}-\frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right). \tag{۵۰.۳}$$

با استفاده از نامساوی (۵۰.۳) در (۴۹.۳) برای $n > ۲$ داریم:

$$\max_{|z|=k}|D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha|-k)\sum_{j=۱}^{n}\frac{۱}{k+|z_j|}\left\{\frac{۲k^n}{۱+k^n}\max_{|z|=۱}|p(z)| + \left(\frac{k^n-۱}{۱+k^n}\right) \times \min_{|z|=k}|p(z)| + \frac{۲|a_{n-۱}|k^{n-۱}}{۱+k^n}\left(\frac{k^n-۱}{n}-\frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right)\right\}. \tag{۵۱.۳}$$

از آن جایی که $D_\alpha p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-۱$ است و $k \geq ۱$، از نامساوی (۷.۳) از لم ۲.۱.۳ برای $n > ۲$ داریم:

$$\max_{|z|=k}|D_\alpha p(z)| \leq k^{n-۱}\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| - (k^{n-۱}-k^{n-۳})|D_\alpha p(۰)| \tag{۵۲.۳}$$

از ترکیب نامساوی‌های (۵۱.۳) و (۵۲.۳) برای $n > ۲$ داریم:

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha|-k)\sum_{j=۱}^{n}\frac{k}{k+|z_j|}\left\{\frac{۲}{۱+k^n}\max_{|z|=۱}|p(z)| + \frac{۱}{k^n}\left(\frac{k^n-۱}{۱+k^n}\right)\min_{|z|=k}|p(z)| + \frac{۲|a_{n-۱}|}{k(۱+k^n)}\left(\frac{k^n-۱}{n}-\frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right)\right\} + \left(۱-\frac{۱}{k^۲}\right)|na_۰+\alpha a_۱|$$

از آن جایی که $|z_j| \leq k_j$ پس

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha|-k)\sum_{j=۱}^{n}\frac{k}{k+k_j}\left\{\frac{۲}{۱+k^n}\max_{|z|=۱}|p(z)| + \frac{۱}{k^n}\left(\frac{k^n-۱}{۱+k^n}\right)\min_{|z|=k}|p(z)| + \frac{۲|a_{n-۱}|}{k(۱+k^n)}\left(\frac{k^n-۱}{n}-\frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right)\right\} + \left(۱-\frac{۱}{k^۲}\right)|na_۰+\alpha a_۱|$$

نامساوی (۴۷.۳) اثبات می‌شود. برای اثبات نامساوی (۴۸.۳) همانند نامساوی (۴۷.۳) پیش می‌رویم با این تفاوت که به جای نامساوی‌های (۵.۳) و (۷.۳) از نامساوی‌های (۶.۳) و (۸.۳) استفاده می‌کنیم.

□

همان طور که ملاحظه می‌کنید نامساوی (۴۷.۳) از قضیه ۲۵.۱.۳ نامساوی (۴۰.۳) از قضیه ۲۱.۱.۳ را بهبود بخشیده است. به این صورت که با اضافه کردن مقادیری مثبت و ضرایب $a_۱$ و $a_۰$ به سمت راست نامساوی‌های (۴۷.۳) و (۴۸.۳) کران این نامساوی‌ها را بهبود بخشیده ایم و لذا نامساوی (۴۰.۳) بهبود می‌یابد.

برای $۱ \leq j \leq n$، $\frac{k}{k+k_j} \geq \frac{۱}{۲}$ قضیه بالا حالت ویژه‌ای را نتیجه می‌دهد.

نتیجه ۲۶.۱.۳. *اگر $p(z) = a_n \prod_{j=۱}^{n}(z-z_j)$ ، $a_n \neq ۰$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq k$ ، $k \geq ۱$ واقع باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| \geq k$ و برای $n > ۲$ داریم:*

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq n(|\alpha|-k)\Big\{&\frac{۱}{۱+k^n}\max_{|z|=۱}|p(z)| + \frac{۱}{۲k^n}\left(\frac{k^n-۱}{k^n+۱}\right)\\ &\times \min_{|z|=k}|p(z)| + \frac{|a_{n-۱}|}{k(۱+k^n)}\left(\frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right)\Big\}\\ &+\left(۱-\frac{۱}{k^۲}\right)|na_۰+\alpha a_۱|,\end{aligned}$$

و برای $n = ۲$ داریم:

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha|-k)\Big\{&\frac{۲}{۱+k^n}\max_{|z|=۱}|p(z)| + \frac{۱}{k^n}\left(\frac{k^n-۱}{k^n+۱}\right)\\ &\times \min_{|z|=k}|p(z)| + \frac{|a_۱|(k-۱)^n}{k(۱+k^n)}\Big\} + \left(۱-\frac{۱}{k}\right)|na_۰+\alpha a_۱|.\end{aligned}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که برای $k > ۱$ و $n > ۲$، $\left(\frac{k^n-۱}{n} - \frac{k^{n-۲}-۱}{n-۲}\right) > ۰$. لذا برای چندجمله‌ای‌های از درجه $n \geq ۲$ نتیجه بالا تعمیمی از قضیه ۲۱.۱.۳ است. در حقیقت به جز حالتی که همه صفرهای $p(z)$ در $|z| = k$ باشند و $a_۰ = a_۱ = a_{n-۱} = ۰$ کران بدست آمده از قضیه ۲۵.۱.۳ همیشه بهبودیافته تر از کران بدست آمده در قضیه ۲۱.۱.۳ است.

قضیه ۲۷.۱.۳. [۱۸] *اگر $p(z) = \sum_{j=۰}^{n} a_j z^j = a_n \prod_{j=۱}^{n}(z-z_j)$ ، $a_n \neq ۰$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $|z_j| \geq k_j$ ، $۱ \leq j \leq n$ که $k = \min(k_۱, k_۲, ..., k_n) \leq ۱$، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| \leq k$ داریم:*

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq (k-|\alpha|)k^{n-۱}\sum_{j=۱}^{n}\frac{k_j}{k+k_j}\left[\frac{۲}{۱+k^n}\max_{|z|=۱}|p(z)| + \frac{(۱-k^n)}{k^n(۱+k^n)}\min_{|z|=k}|p(z)|\right]. \tag{۵۳.۳}$$

برهان. بنا به فرض صفرهای $p(z)$ برای $1 \leq j \leq n$ در $|z_j| \geq k_j$ صدق می‌کنند، به طوری که $k = \min(k_1, k_2, ..., k_n) \leq 1$. در نتیجه صفرهای چندجمله‌ای $q(z) = z^n p(\frac{1}{\bar{z}})$ برای $1 \leq j \leq n$ در $\frac{1}{|z_j|} \leq \frac{1}{k_j}$ صدق می‌کنند به طوری که $\frac{1}{k} = \max(\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, ..., \frac{1}{k_n}) \geq 1$. با به کار بردن قضیه ۲۱.۱.۳ برای چندجمله‌ای $q(z)$ با $|\delta| \geq \frac{1}{k}$ داریم:

$$\max_{|z|=1} |D_\delta q(z)| \geq k^{n-1}(|\delta| - \frac{1}{k}) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{k_j}} \Bigg\{ \frac{\frac{2}{k^n}}{1 + \frac{1}{k^n}} \max_{|z|=1} |q(z)| + \frac{\frac{1}{k^n} - 1}{1 + \frac{1}{k^n}} \min_{|z|=\frac{1}{k}} |q(z)| \Bigg\} \tag{۵۴.۳}$$

بنا به لم ۱۳.۱.۲ برای $|z| = 1$ داریم:

$$|D_\delta q(z)| = |\delta| |D_{\frac{1}{\bar{\delta}}} p(z)|$$

با استفاده از تساوی بالا در نامساوی (۵۴.۳) برای $|\delta| \geq \frac{1}{k}$ داریم:

$$|\delta| \max_{|z|=1} |D_{\frac{1}{\bar{\delta}}} p(z)| \geq k^{n-1}(|\delta| - \frac{1}{k}) \sum_{j=1}^{n} \frac{k k_j}{k + k_j} \Bigg\{ \frac{2}{1 + k^n} \max_{|z|=1} |p(z)| + \frac{(1 - k^n)}{(1 + k^n) k^n} \min_{|z|=k} |p(z)| \Bigg\} \tag{۵۵.۳}$$

حال α را به جای $\frac{1}{\bar{\delta}}$ جایگزین می‌کنیم به طوری که $|\alpha| \leq k$، از نامساوی (۵۵.۳) نتیجه می‌شود که

$$|\frac{1}{\alpha}| \max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq k^{n-1}(|\frac{1}{\alpha}| - \frac{1}{k}) \sum_{j=1}^{n} \frac{k k_j}{k + k_j} \Bigg\{ \frac{2}{1 + k^n} \max_{|z|=1} |p(z)| + \frac{(1 - k^n)}{(1 + k^n) k^n} \min_{|z|=k} |p(z)| \Bigg\}$$

یا

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq k^{n-1}(k - |\alpha|) \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{k + k_j} \left\{ \frac{2}{1 + k^n} \max_{|z|=1} |p(z)| + \frac{(1 - k^n)}{(1 + k^n) k^n} \min_{|z|=k} |p(z)| \right\}$$

که همان نامساوی (۵۳.۳) است. لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

فصل ۴

تعمیم‌هایی از برخی از نامساوی‌های مشتق قطبی چندجمله‌ای‌ها

۱.۴ تعمیم‌هایی از برخی از نامساوی‌های مشتق قطبی چندجمله‌ای‌ها

در این فصل به بیان تعمیم‌هایی از نامساوی‌هایی از مشتق قطبی از چندجمله‌ای‌هایی که شامل صفرهایشان در $|z| \leq k \leq ۱$ باشد می‌پردازیم.

اگر $p(z)$یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه درباره تخمینی از $|p'(z)|$ روی دیسک واحد $|z| = ۱$ داریم:

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq n \max_{|z|=۱} |p(z)| \tag{۱.۴}$$

نامساوی بالا که یک نتیجه منطقی از نامساوی برنشتاین [۱] روی مشتق یک چندجمله‌ای مثلثاتی است بهترین نتیجه ممکن است و تساوی برای چندجمله‌ای $p(z) = \lambda z^n$ که λ یک عدد مختلط است برقرار است.

اگر خودمان را به رده‌ای از چندجمله‌ای‌ها که هیچ صفری روی $|z| < ۱$ ندارند محدود کنیم، آن‌گاه نامساوی بالا بهبود خواهد یافت. در حقیقت در این باره اردوش [۲] حدس اولیه را زد و سپس لاکس [۳] [۳۰] اثبات کرد که اگر $p(z) \neq ۰$ در $|z| < ۱$ آن‌گاه:

$$\max_{|z|=۱} |p'(z)| \leq \frac{n}{۲} \max_{|z|=۱} |p(z)| \tag{۲.۴}$$

حال اگر همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ در $|z| \leq ۱$ واقع باشند، آن‌گاه توران [۴] [۳۵] نامساوی

---

[۱] Bernstein
[۲] Ardos
[۳] Lax
[۴] Turan

زیر را اثبات کرد

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \frac{n}{2}\max_{|z|=1}|p(z)| \tag{۳.۴}$$

نامساوی‌های (۲.۴) و (۳.۴) بهترین نتیجه ممکن هستند و تساوی برای چندجمله‌ای‌هایی که همه صفرهایشان در $|z| = 1$ قرار داشته باشند برقرار خواهد بود.

به عنوان بسطی از (۲.۴) و (۳.۴) مالک [۵] [۳۱] اثبات کرد که اگر $p(z) \neq 0$ در $|z| < k$ ، $k \geq 1$ ، آن‌گاه

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \leq (\frac{n}{1+k})\max_{|z|=1}|p(z)| \tag{۴.۴}$$

در حالی که اگر همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k \leq 1$ باشند، آن‌گاه

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq (\frac{n}{1+k})\max_{|z|=1}|p(z)| \tag{۵.۴}$$

در نامساوی‌های (۴.۴) و (۵.۴) اگر $k \geq 1$ در نظر بگیریم به ترتیب نامساوی‌های زیر را داریم:

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \leq \frac{n}{1+k^n}\max_{|z|=1}|p(z)| \tag{۶.۴}$$

و

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \frac{n}{1+k^n}\max_{|z|=1}|p(z)| \tag{۷.۴}$$

گوویل [۶] [۲۴] نامساوی‌های (۵.۴) و (۷.۴) را با اثبات این که اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n باشد و همه صفرهایش در $|z| \leq k$ باشند، بهبود بخشید به این صورت که برای $k \leq 1$ داریم:

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \left(\frac{n}{1+k}\right)\max_{|z|=1}|p(z)| + \left(\frac{n}{k^{n-1}(1+k)}\right)\min_{|z|=k}|p(z)| \tag{۸.۴}$$

و برای $k \geq 1$ داریم:

$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \left(\frac{n}{1+k^n}\right)\max_{|z|=1}|p(z)| + \left(\frac{n}{1+k^n}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|. \tag{۹.۴}$$

این دو نامساوی بهترین نتیجه ممکن هستند و در (۸.۴) تساوی برای $p(z) = (z+k)^n$ و در (۹.۴) برای $p(z) = z^n + k^n$ برقرار است.

در این فصل برخی از تعمیم‌ها و بهبودهایی از نامساوی‌های بالا ارائه می‌دهیم.

---
[۵] Malik
[۶] Govil

با توجه به رده ی عمومی‌تر از چندجمله‌ای‌ها به فرم $p(z) = a_\circ + \sum_{j=t}^{n} a_j z^j$، $1 \leq t \leq n$ که در $|z| < k$، $k \geq 1$ صفر نشود، گوویل، گاردنر [7] و ویمز [8] [21] نامساوی زیر را اثبات کردند

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \leq \frac{n}{1+S_\circ} \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| - m \right\} \tag{۱۰.۴}$$

به طوری که $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ و

$$S_\circ = k^{t+1} \left\{ \frac{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_\circ| - m} k^{t-1} + 1}{(\frac{t}{n})\frac{|a_t|}{|a_\circ| - m} k^{t+1} + 1} \right\}. \tag{۱۱.۴}$$

نامساوی (۱۰.۴) از منافع مستقل است زیرا در کنار اثبات یک تعمیم و بهبود از نامساوی (۲.۴) تعمیم و بهبودی از نتایجی از عزیز و داوود [۲] ، چان [9] و مالک [۱۴] و گوویل [۲۴] را فراهم می‌کند. به عبارت دیگر برای رده‌ای از چندجمله‌ای‌ها به فرم $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ از درجه n که همه صفرهایشان در $|z| \leq k \leq 1$، شاه [10] و عزیز [۳۴] نامساوی زیر را اثبات کردند

$$\max_{|z|=1} |p'(z)| \geq \frac{n}{1+k^\mu} \left\{ \max_{|z|=1} |p(z)| + \frac{1}{k^{n-\mu}} \min_{|z|=k} |p(z)| \right\}. \tag{۱۲.۴}$$

برای $\mu = 1$ نامساوی (۱۲.۴) به نامساویی مربوط به گوویل [۲۴] تبدیل می‌شود.

قضیه ۱.۱.۴. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z| \leq k \leq 1$ واقع باشند، آن‌گاه برای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| \geq k$ داریم:*

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - k}{1+k} \right) \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{۱۳.۴}$$

نامساوی بهبود یافته است و تساوی برای $p(z) = (z-k)^n$ با $\alpha \geq k$ برقرار است. در قضیه قبل اگر همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k$، $k \geq 1$ قرار داشته باشند، آن‌گاه نامساوی زیر را داریم:

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - k}{1+k^n} \right) \max_{|z|=1} |p(z)| \tag{۱۴.۴}$$

اگر هر دو طرف نامساوی‌های (۱۳.۴) و (۱۴.۴) را بر $|\alpha|$ تقسیم کنیم و $|\alpha| \to \infty$ نامساوی‌های (۵.۴) و (۷.۴) بدست می‌آیند.

---

[7] Gardner
[8] weems
[9] Chan
[10] Shah

لم ۲.۱.۴. *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z|\leq k$ *،* $k\leq 1$ *باشند آن‌گاه روی* $|z|=1$ *داریم:*

$$|p'(z)|\geq\left(\frac{n}{1+k}\right)|p(z)|. \tag{۱۵.۴}$$

این لم از گوویل [۲۵] است.

لم ۳.۱.۴. *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z|\leq k$ *،* $k\leq 1$ *قرار داشته باشند، آن‌گاه روی* $|z|=1$ *وقتی* $q(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ *داریم:*

$$|q'(z)|\leq k|p'(z)|-\left(\frac{n}{k^{n-1}}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|. \tag{۱۶.۴}$$

این لم نیز از گوویل [۲۴] می‌باشد.

لم ۴.۱.۴. *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z|\leq k$ *،* $k\leq 1$ *باشند، آن‌گاه روی* $|z|=1$ *وقتی* $q(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ *و* $L=\dfrac{nk^2|a_n|+|a_{n-1}|}{|a_{n-1}|+n|a_n|}$ *داریم:*

$$|q'(z)|\leq L|p'(z)|. \tag{۱۷.۴}$$

این لم نیز از گوویل [۲۶] است.

لم ۵.۱.۴. *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z|\leq k$ *،* $k\leq 1$ *باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *که* $|\alpha|\geq L$ *روی* $|z|=1$ *داریم:*

$$|D_\alpha p(z)|\geq n\left(\frac{|\alpha|-L}{1+k}\right)|p(z)|. \tag{۱۸.۴}$$

برهان. اگر $q(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$، آن‌گاه روی $|z|=1$، $|q'(z)|=|np(z)-zp'(z)|$.
لذا روی $|z|=1$ داریم:

$$\begin{aligned}|D_\alpha p(z)|&=|np(z)+(\alpha-z)p'(z)|\\&=|\alpha p'(z)+np(z)-zp'(z)|\\&\geq|\alpha||p'(z)|-|np(z)-zp'(z)|\end{aligned}$$

که معادل است با

$$|D_\alpha p(z)| \geq |\alpha||p'(z)| - |q'(z)| \tag{۱۹.۴}$$

با ترکیب لم ۴.۱.۴ با نامساوی (۱۹.۴) داریم:

$$|D_\alpha p(z)| \geq |\alpha||p'(z)| - L|p'(z)| = (|\alpha| - L)|p'(z)|$$

از ترکیب لم ۲.۱.۴ با نامساوی بالا خواهیم داشت:

$$|D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - L)\left(\frac{n}{1+k}\right)|p(z)|$$

لذا اثبات لم کامل می‌شود. □

قضیه ۶.۱.۴. [۲۶] *اگر $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $1 \leq k \leq |z|$ قرار داشته باشند، آن‌گاه برای هر عدد α با $|\alpha| \geq k$ داریم:*

$$\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)| \geq \frac{n\,(|\alpha| - k)}{1+k}\max_{|z|=1}|p(z)| + \frac{n\,(|\alpha|+1)}{k^{n-1}\,(1+k)}\min_{|z|=k}|p(z)|. \tag{۲۰.۴}$$

برهان. اگر $q(z) = z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$، آن‌گاه از (۱۹.۴) و لم ۳.۱.۴ روی $|z| = 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
|D_\alpha p(z)| &\geq |\alpha||p'(z)| - |q'(z)| \\
&\geq |\alpha||p'(z)| - \left\{k|p'(z)| - \left(\frac{n}{k^{n-1}}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|\right\} \\
&= (|\alpha| - k)|p'(z)| + \left(\frac{n}{k^{n-1}}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|
\end{aligned}$$

که معادل است با

$$\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - k)\max_{|z|=1}|p'(z)| + \left(\frac{n}{k^{n-1}}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|$$

با ترکیب نامساوی بالا با نامساوی (۸.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)| &\geq (|\alpha| - k)\left(\frac{n}{1+k}\max_{|z|=1}|p(z)| + \frac{nm}{k^{n-1}(1+k)}\right) + \frac{nm}{k^{n-1}} \\
&= n\left(\frac{|\alpha| - k}{1+k}\right)\max_{|z|=1}|p(z)| + n\left(\frac{|\alpha|+1}{k^{n-1}(1+k)}\right)\min_{|z|=k}|p(z)|
\end{aligned}$$

که اثبات قضیه ۶.۱.۴ را کامل می‌کند.

□

این نامساوی بهبودیافته است و تساوی برای $p(z) = (z-k)^n$، $\alpha \geq k$ برقرار است.
به وضوح قضیه ۶.۱.۴ نامساوی (۱۳.۴) را بهبود می‌بخشد. علاوه براین، نامساوی (۸.۴) را نیز تعمیم می‌دهد، برای بدست آوردن نامساوی (۸.۴) از قضیه ۶.۱.۴ دو طرف نامساوی (۲۰.۴) را بر $|\alpha|$ تقسیم می‌کنیم و $|\alpha| \to \infty$.

لم ۷.۱.۴. *اگر همه صفرهای* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ *در* $|z|\leq k$ *که* $k\geq 1$ *باشند و* $m=\min_{|z|=k}|p(z)|$، *آن‌گاه به ازای هر عدد مختلط* λ *با* $|\lambda|<1$، *همه صفرهای چندجمله‌ای* $p(z)+\lambda m$ *نیز در* $|z|<k$ *واقع خواهند بود.*

برهان. اگر $m=\min_{|z|=k}|p(z)|$، آن‌گاه روی $|z|=k$، $|p(z)|\geq m$. بنابراین به ازای هر λ با $|\lambda|<1$ روی $|z|=k$، $|p(z)|>|\lambda m|$. از آن جایی که همه صفرهای $p(z)$ در $|z|<k$ واقع‌اند، نتیجه از قضیه روشه بدست می‌آید.

□

لم زیر مربوط به ماردن [۳۲] است.

لم ۸.۱.۴. *اگر همه صفرهای* $p(z)$ *در* $|z|\leq k$ *واقع باشند، آن‌گاه به ازای* $|\alpha|\geq k$، *همه صفرهای مشتق قطبی* $D_\alpha p(z)$ *از* $p(z)$ *نسبت به نقطه* α *نیز در* $|z|\leq k$ *واقع‌اند.*

حال اگر مایل به استفاده از اطلاعاتی درباره ضرایب $|a_{n-1}|$ و $|a_n|$ باشیم، قادر به بدست آوردن بهبودی برای قضیه ۶.۱.۴ خواهیم بود

قضیه ۹.۱.۴. [۲۶] *فرض کنیم* $p(z)$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z|\leq k\leq 1$ *باشند. اگر* $L=\frac{nk^2|a_n|+|a_{n-1}|}{|a_{n-1}|+n|a_n|}$، *آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *با* $|\alpha|\geq k$ *داریم:*

$$\begin{aligned}\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)| &\geq \frac{n(|\alpha|-k)}{1+k}\max_{|z|=1}|p(z)|+\frac{n(|\alpha|+1)}{k^{n-1}(1+k)}m\\ &+\frac{n(k-L)}{1+k}\max_{|z|=1}|p(z)|+\frac{n(L-k)}{k^n(1+k)}m. \qquad (۲۱.۴)\end{aligned}$$

به طوری که $m=\min_{|z|=k}|p(z)|$ *است.*

برهان. اگر $p(z)$ یک صفر روی $|z|=k$، $k\leq 1$ داشته باشد، آن‌گاه $m=0$. با در نظر گرفتن لم ۵.۱.۴ نتیجه به وضوح برقرار است. لذا بدون از دست رفتن کلیت قضیه فرض می‌کنیم همه صفرهای $p(z)$ در $|z|<k$، $k\leq 1$ قرار دارند، بنابراین $m>0$ و $\frac{z^n}{p(z)}$ در $|z|\geq k$ تحلیلی است. بنا به اصل ماکسیمم قدرمطلق برای دامنه‌های بی‌کران و $|z|\geq k$ داریم:

$$\left|\frac{z^n}{p(z)}\right|\leq\max_{|z|=k}\left|\frac{z^n}{p(z)}\right|=\frac{k^n}{\min_{|z|=k}|p(z)|}$$

در نتیجه برای $|z|\geq k$، $k^n|p(z)|\geq m|z|^n$. بنابراین بنا به قضیه روشه به ازای هر λ با $|\lambda|<1$ چندجمله‌ای $k^np(z)-\lambda mz^n$ همه صفرهایش در $|z|<k$، $k\leq 1$ قرار دارند. از لم ۸.۱.۴ برای

$|\alpha| \geq k$ نتیجه می‌شود که همه صفرهای چندجمله‌ای $D_\alpha[k^n p(z) - \lambda m z^n]$ نیز در $|z| < k$ قرار دارند. پس به ازای هر λ با $|\lambda| < ۱$، $k^n D_\alpha p(z) - \lambda mn\alpha z^{n-۱}$ هیچ صفری در $|z| \geq k$ ندارد. برای $|z| \geq k$ و $|\alpha| \geq k$ داریم:

$$k^n |D_\alpha p(z)| \geq |\lambda| mn|\alpha||z|^{n-۱} \tag{۲۲.۴}$$

از آن جایی که همه صفرهای $k^n p(z) - \lambda m z^n$ در $|z| < k$، $k \geq ۱$ واقع‌اند، می‌توانیم لم ۵.۱.۴ را برای $k^n p(z) - \lambda m z^n$ بکار ببریم و برای $|\alpha| \geq L$ و روی $|z| = ۱$ بدست می‌آوریم

$$|D_\alpha[k^n p(z) - \lambda m z^n]| \geq n\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right)|k^n p(z) - \lambda m z^n| \tag{۲۳.۴}$$

با توجه به این که $|\alpha| \geq k \geq L \geq ۰$، سمت راست نامساوی (۲۳.۴) مثبت است. حال فرض کنیم $z_۰$ روی $|z| = ۱$ باشد به طوری که $|p(z_۰)| = \max_{|z|=۱}|p(z)|$، در این صورت

$$D_\alpha[k^n p(z) - \lambda m z^n] = k^n D_\alpha p(z) - \lambda mn\alpha z^{n-۱}$$

از نامساوی (۲۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned} |k^n\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰} - \lambda m\alpha n z_۰^{n-۱}| &\geq n\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right)|k^n p(z_۰) - \lambda m z_۰^n| \\ &\geq n\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right)(k^n|p(z_۰)| - |\lambda| m |z_۰|^n) \\ &= n\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right)k^n|p(z_۰)| - n\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right)|\lambda| m. \end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

اگر در (۲۴.۴) آرگومانی از λ را چنان انتخاب کنیم که

$$\begin{aligned} &|k^n\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰} - \lambda m\alpha n z_۰^{n-۱}| \\ &= k^n|\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰}| - |\lambda| mn|\alpha||z_۰|^{n-۱} \end{aligned}$$

بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &k^n|\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰}| - |\lambda| mn|\alpha||z_۰|^{n-۱} \\ &\geq n\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right)k^n|p(z_۰)| - n\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right)|\lambda| m. \end{aligned} \tag{۲۵.۴}$$

از نامساوی (۲۲.۴) نامنفی بودن نامساوی (۲۵.۴) نتیجه می‌شود. چون $z_۰$ روی $|z| = ۱$ واقع است و $|p(z_۰)| = \max_{|z|=۱}|p(z)|$، نامساوی (۲۵.۴) معادل است با

$$\begin{aligned} k^n|\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰}| &\geq n\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right)k^n \max_{|z|=۱}|p(z)| \\ &+ |\lambda| mn|\alpha| - |\lambda| mn\left(\frac{|\alpha| - L}{۱+k}\right), \end{aligned}$$

در نتیجه

$$k^n \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - L}{۱ + k}\right) k^n \max_{|z|=۱} |p(z)| + |\lambda| mn|\alpha| - |\lambda| mn \left(\frac{|\alpha| - L}{۱ + k}\right). \tag{۲۶.۴}$$

با قرار دادن $|\lambda| \to ۱$ در نامساوی (۲۶.۴) بدست می‌آوریم

$$k^n \max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - L}{۱ + k}\right) k^n \max_{|z|=۱} |p(z)| + n \left(\frac{k|\alpha| + L}{۱ + k}\right) m,$$

که به وضوح معادل است با

$$\max_{|z|=۱} |D_\alpha p(z)| \geq \frac{n(|\alpha| - k)}{۱ + k} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{n(|\alpha| + ۱)}{k^{n-۱}(۱ + k)} m + \frac{n(k - L)}{۱ + k} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{n(L - k)}{k^n(۱ + k)} m.$$

لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

در حالت کلی نامساوی (۲۱.۴) بجز در حالتی که $k = ۱$ یا $|\frac{a_{n-۱}}{a_n}| = nk$، نامساوی (۲۰.۴) از قضیه ۶.۱.۴ را بهبود می‌بخشد لذا برای اثبات این موضوع کافیست نشان دهیم که

$$\frac{n(k - L)}{۱ + k} \max_{|z|=۱} |p(z)| + \frac{n(L - k)}{k^n(۱ + k)} \min_{|z|=k} |p(z)| \geq ۰$$

و معادل است با

$$\frac{n(k - L)}{۱ + k} \max_{|z|=۱} |p(z)| \geq \frac{n(k - L)}{k^n(۱ + k)} \min_{|z|=k} |p(z)| \tag{۲۷.۴}$$

توجه داریم که $L \geq k$. برای $۱ \leq i \leq n$ اگر z_i ها صفرهای $p(z)$ باشند، آن‌گاه $|z_i| \leq k$، $۱ \leq i \leq n$ و

$$|\frac{a_{n-۱}}{a_n}| = |z_۱ + z_۲ + ... + z_n| \leq |z_۱| + |z_۲| + ... + |z_n| \leq nk$$

چون $k \leq ۱$، در نتیجه $(۱ - k)|a_{n-۱}| \leq (۱ - k)nk|a_n|$،لذا با $L = \frac{nk^۲|a_n| + |a_{n-۱}|}{|a_{n-۱}| + n|a_n|} \leq k$ معادل است. بنابراین نامساوی $k \geq L$ برقرار است.

با در نظر گرفتن نامساوی $k \geq L$ نامساوی (۲۷.۴) به سادگی با نامساوی زیر معادل می‌شود

$$\max_{|z|=۱} |p(z)| \geq \frac{\min_{|z|=k} |p(z)|}{k^n}.$$

لم زیر از گوویل، رحمان و چمیزر [۲۷] است.

لم ۱۰.۱.۴. *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که هیچ صفری در* $|z|\leq k$ ، $k\geq 1$ *نداشته باشد، آن‌گاه روی* $|z|=1$ *داریم:*

$$|p'(z)|\leq\left(\frac{1}{k^2}\right)\left(\frac{1+\frac{k^2}{n}|\frac{a_1}{a_0}|}{\frac{1}{n}|\frac{a_1}{a_0}|+1}\right)|q'(z)| \tag{۲۸.۴}$$

لم زیر از گوویل [۲۴] است

لم ۱۱.۱.۴. *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z|\geq k\geq 1$ *و* $q(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\bar z})}$ *باشند، آن‌گاه*

$$|q'(z)|\geq k|p'(z)|+n\min_{|z|=k}|p(z)|. \tag{۲۹.۴}$$

برای چندجمله‌ای‌هایی که همه صفرهایشان در $|z|\leq k$ که $k\geq 1$ قرار دارند، قضیه بعد که بسط نامساوی (۹.۴) برای مشتق قطبی است را داریم.

قضیه ۱۲.۱.۴. [۲۶] *اگر* $p(z)=\sum_{j=0}^{n}a_jz^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z|\leq k$ *که* $k\geq 1$ *باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *که* $|\alpha|\geq 1+k+k^n$ *و* $m=\min_{|z|=k}|p(z)|$ *داریم:*

$$\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)|\geq n\left(\frac{|\alpha|-k}{1+k^n}\right)\max_{|z|=1}|p(z)|+n\left(\frac{|\alpha|-(1+k+k^n)}{1+k^n}\right)m. \tag{۳۰.۴}$$

برهان. بدون از دست دادن کلیت قضیه می‌توانیم فرض کنیم که همه صفرهای $p(z)$ در $|z|<k$ ، $k\geq 1$ قرار دارند. زیرا اگر $p(z)$ یک صفر روی $|z|=k$ داشته باشد، آن‌گاه $m=0$. با در نظر گرفتن نامساوی (۱۴.۴) قضیه به وضوح برقرار خواهد بود. از آن جایی که همه صفرهای $p(z)$ در $|z|<k$ که $k\geq 1$ قرار دارند، بنا به لم ۷.۱.۴ به ازای هر λ با $|\lambda|<1$، چندجمله‌ای $p(z)+\lambda m$ نیز همه صفرهایش در $|z|<k$، $k\geq 1$ قرار دارند. پس نامساوی (۱۴.۴) را برای $p(z)+\lambda m$ بکار می‌بریم لذا

$$\max_{|z|=1}|D_\alpha[p(z)+\lambda m]|\geq n\left(\frac{|\alpha|-k}{1+k^n}\right)\max_{|z|=1}|p(z)+\lambda m|$$

فرض کنیم z_0 یک نقطه روی $|z|=1$ باشد به طوری که $|p(z_0)|=\max_{|z|=1}|p(z)|$، در این صورت

$$\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)+\lambda mn|\geq n\left(\frac{|\alpha|-k}{1+k^n}\right)|p(z_0)+\lambda m| \tag{۳۱.۴}$$

اگر آرگومانی از λ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $|p(z_\circ) + \lambda m| = |p(z_\circ)| + |\lambda| m$، آن‌گاه از (۳۱.۴) داریم:

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z) + \lambda mn| \geq n \left(\frac{|\alpha| - k}{1 + k^n}\right) (|p(z_\circ)| + |\lambda| m)$$

در نتیجه

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| + |\lambda| mn \geq n \left(\frac{|\alpha| - k}{1 + k^n}\right) (\max_{|z|=1} |p(z)| + |\lambda| m)$$

نامساوی قبل به وضوح معادل است با

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - k}{1 + k^n}\right) \max_{|z|=1} |p(z)| + n|\lambda| \left(\frac{|\alpha| - (1 + k + k^n)}{1 + k^n}\right) m \tag{۳۲.۴}$$

حال اگر در (۳۲.۴) فرض کنیم $|\lambda| \to 1$، آن‌گاه

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - k}{1 + k^n}\right) \max_{|z|=1} |p(z)| + n \left(\frac{|\alpha| - (1 + k + k^n)}{1 + k^n}\right) m$$

که همان نامساوی (۳۰.۴) است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

قضیه ۱۲.۱.۴ نامساوی (۱۴.۴) را بهبود می‌بخشد. همچنین نامساوی (۹.۴) را نیز تعمیم می‌دهد، برای بدست آوردن نامساوی (۹.۴) از نامساوی (۳۰.۴) هر دو طرف نامساوی (۳۰.۴) را بر $|\alpha|$ تقسیم می‌کنیم و $|\alpha| \to \infty$ پس نامساوی (۹.۴) بدست می‌آید.

لم زیر از گاردنر، گوویل و ویمز [۲۱] است.

لم ۱۳.۱.۴. *اگر $p(z) = a_\circ + \sum_{j=t}^{n} a_j z^j$، $t \geq 1$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، که هیچ صفری در $|z| < k$، $k \geq 1$ نداشته باشد، آن‌گاه وقتی $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ و $S_\circ$ تساوی تعریف شده در (۱۱.۴) باشد، روی $|z| = 1$ داریم:*

$$|q'(z)| \geq S_\circ |p'(z)| + mn. \tag{۳۳.۴}$$

لم ۱۴.۱.۴. *اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$، آن‌گاه برای $|z| = 1$ داریم:*

$$|p'(z)| + |q'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |p(z)|. \tag{۳۴.۴}$$

حال نامساوی‌های (۱۰.۴) و (۱۲.۴) را برای مشتق قطبی از یک چندجمله‌ای بسط می‌دهیم و تعمیمی از این نتایج بدست می‌آوریم. به عبارت دیگر یک نتیجه عمومی‌تر از گوویل و مک توم [11] [۲۸] را به عنوان یک مورد خاص اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۱.۴. [۱۹] *فرض کنید* $p(z) = a_\circ + \sum_{j=t}^{n} a_j z^j$ ، $1 \leq t \leq n$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که هیچ صفری در* $|z| < k$ ، $k \geq 1$ *نداشته باشد، در این صورت به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *که* $|\alpha| \geq 1$ *داریم:*

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \leq \frac{n}{1+S_\circ}\left\{(|\alpha| + S_\circ)\max_{|z|=1}|p(z)| - (|\alpha| - 1)\, m\right\}. \qquad (۳۵.۴)$$

به طوری که $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ *و* $S_\circ$ *تساوی تعریف شده در (۱۱.۴) است.*

برهان. با ترکیب لم‌های ۱۳.۱.۴ و ۱۴.۱.۴ برای $|z| = 1$ داریم:

$$S_\circ |p'(z)| + mn + |p'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |p(z)|$$

پس برای $|z| = 1$ معادل است با

$$|p'(z)| \leq \frac{n}{1+S_\circ}\left\{\max_{|z|=1}|p(z)| - m\right\} \qquad (۳۶.۴)$$

چون $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$، به سادگی می‌توان برای $|z| = 1$ نشان داد که

$$|q'(z)| = |np(z) - zp'(z)|$$

هم‌چنین به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α که $|\alpha| \geq 1$ مشتق قطبی $p(z)$ نسبت به نقطه α به فرم

$$D_\alpha p(z) = np(z) + (\alpha - z)p'(z).$$

که برای $|z| = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} |D_\alpha p(z)| &\leq |np(z) - zp'(z)| + |\alpha||p'(z)| \\ &= |q'(z)| + |\alpha||p'(z)| \\ &= |q'(z)| + |p'(z)| - |p'(z)| + |\alpha||p'(z)| \\ &\leq n\max_{|z|=1}|p(z)| + (|\alpha| - 1)|p'(z)| \qquad (۳۷.۴) \end{aligned}$$

نامساوی (۳۷.۴) در ترکیب با نامساوی (۳۶.۴) برای $|z| = 1$ نتیجه می‌دهد

$$|D_\alpha p(z)| \leq n\max_{|z|=1}|p(z)| + (|\alpha| - 1)\left\{\frac{n}{1+S_\circ}\left(\max_{|z|=1}|p(z)| - m\right)\right\}$$

[11] McTume

پس
$$|D_\alpha p(z)| \leq n \max_{|z|=1}|p(z)| + \frac{n(|\alpha|-1)}{1+S_0}\max_{|z|=1}|p(z)| - \frac{n(|\alpha|-1)}{1+S_0}m$$
به طوری که از این نامساوی به سادگی نامساوی (۳۵.۴) بدست می‌آید. $\square$

به وضوح قضیه ۱۵.۱.۴ نامساوی (۱۰.۴) را تعمیم می‌دهد و برای بدست آوردن نامساوی (۱۰.۴) از قضیه بالا، دو طرف نامساوی (۳۵.۴) را بر $|\alpha|$ تقسیم می‌کنیم و $|\alpha| \to \infty$.

لمی که در ادامه ارائه می‌دهیم از گاردنر، گوویل و وییمز [۲۱] است.

لم ۱۶.۱.۴. *اگر* $p(z) = a_0 + \sum_{j=t}^{n} a_j z^j$ ، $t \geq 1$ *یک چندجمله ای از درجه* n *باشد که هیچ صفری در* $|z| < k$ ، $k \geq 1$ *نداشته باشد، آن‌گاه*
$$s_0 \geq k^t.$$

تشخیص ناصعودی بودن تابع $(\frac{|\alpha|+x}{1+x})\max_{|z|=1}|p(z)| - (\frac{|\alpha|-1}{1+x})m$ به ازای هر α با $|\alpha| \geq 1$ به عنوان مثال از تست مشتق، ساده است. اگر این مطلب را با لم قبل ترکیب کنیم، با توجه به این که $s_0 \geq k^t$ برای $t \geq 1$ نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۷.۱.۴. *اگر* $p(z) = a_0 + \sum_{j=t}^{n} a_j z^j$ ، $1 \leq t \leq n$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که هیچ صفری در* $|z| < k$ ، $k \geq 1$ *نداشته باشد، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *با* $|\alpha| \geq 1$ *داریم:*
$$\max_{|z|=1}|D_\alpha p(z)| \leq \frac{n}{1+k^t}\left\{(|\alpha|+k^t)\max_{|z|=1}|p(z)| - (|\alpha|-1)m\right\} \qquad (۳۸.۴)$$

لم ۱۸.۱.۴. *اگر* $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ، $1 \leq \mu \leq n$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k \leq 1$ *باشند و* $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ ، *آن‌گاه روی* $|z| = 1$ *وقتی* $S_\mu = \frac{n|a_n|k^{2\mu} + \mu|a_{n-\mu}|k^{\mu-1}}{n|a_n|k^{\mu-1} + \mu|a_{n-\mu}|}$ *و* $\frac{\mu}{n}|\frac{a_{n-\mu}}{a_n}| \leq k^\mu$ *داریم:*
$$|q'(z)| \leq S_\mu |p'(z)|. \qquad (۳۹.۴)$$

لم بعد از عزیز و شاه [۱۰] می‌باشد.

لم ۱۹.۱.۴. *اگر* $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$ ، $1 \leq \mu \leq n$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k \leq 1$ *باشند، آن‌گاه داریم:*
$$\max_{|z|=1}|p'(z)| \geq \frac{n}{1+k^\mu}\max_{|z|=1}|p(z)|. \qquad (۴۰.۴)$$

لم ۲۰.۱.۴. *اگر* $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$، $1 \leq \mu \leq n$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k \leq 1$ *باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *که* $|\alpha| \geq S_\mu$ *و با تعریف* S_μ *در لم ۱۸.۱.۴ داریم:*

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - S_\mu}{1 + k^\mu} \right) \max_{|z|=1} |p(z)|. \qquad (۴۱.۴)$$

برهان. اگر $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$، آن‌گاه $p(z) = z^n \overline{q(\frac{1}{\bar{z}})}$ و روی $|z| = 1$ به سادگی می‌توان اثبات کرد که

$$|q'(z)| = |np(z) - zp'(z)|$$

حال به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط α با $|\alpha| \geq S_\mu$ داریم:

$$|D_\alpha p(z)| = |np(z) + (\alpha - z)p'(z)| \geq |\alpha||p'(z)| - |np(z) - zp'(z)|$$

به طوری که برای $|z| = 1$ داریم:

$$|D_\alpha p(z)| \geq |\alpha||p'(z)| - |q'(z)|$$

با ترکیب با لم ۱۸.۱.۴ و نامساوی بالا برای $|z| = 1$ داریم:

$$|D_\alpha p(z)| \geq (|\alpha| - S_\mu)|p'(z)|$$

همچنین با ترکیب نامساوی بالا با لم ۱۹.۱.۴ داریم:

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq n \left(\frac{|\alpha| - S_\mu}{1 + k^\mu} \right) \max_{|z|=1} |p(z)|$$

و اثبات لم کامل می‌شود.

□

قضیه ۲۱.۱.۴. [۱۹] *اگر* $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=t}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$، $1 \leq t \leq n$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k \leq 1$ *باشند و* α *هر عدد حقیقی یا مختلط با* $|\alpha| \leq 1$، *آن‌گاه برای* $|z| = 1$ *و* $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ *داریم:*

$$|D_\alpha p(z)| \leq n \left(\frac{k^t + |\alpha|}{1 + k^t} \right) \max_{|z|=1} |p(z)| - n \left(\frac{1 - |\alpha|}{k^{n-t}(1 + k^t)} \right) m. \qquad (۴۲.۴)$$

برهان. بنا به فرض همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z)$ در $|z| \leq k \leq 1$ قرار دارند، بنابراین چندجمله‌ای $q(z) = z^n \overline{p(\frac{1}{\bar{z}})}$ هیچ صفری در $|z| < \frac{1}{k}$، $\frac{1}{k} \geq 1$ ندارد. نتیجه ۱۷.۱.۴ را برای چندجمله‌ای $q(z)$ به کار می‌بریم برای $|\delta| \geq 1$ و $|z| = 1$ داریم:

$$|D_\delta q(z)| \leq \frac{n}{1 + \frac{1}{k^t}} \left\{ \left(|\delta| + \frac{1}{k^t} \right) \max_{|z|=1} |q(z)| - (|\delta| - 1) \min_{|z|=\frac{1}{k}} |q(z)| \right\}$$

پس برای $|z|=1$ داریم:

$$|D_\delta q(z)| \le \frac{n(|\delta|k^t+1)}{1+k^t}\max_{|z|=1}|p(z)| - \frac{nk^t(|\delta|-1)}{1+k^t}\frac{1}{k^n}\min_{|z|=k}|p(z)| \tag{۴۳.۴}$$

به سادگی از لم ۱۳.۱.۲ برای $|\delta|\ge 1$ و $|z|=1$ خواهیم داشت

$$|D_\delta q(z)| = |\delta||D_{\frac{1}{\overline{\delta}}}p(z)| \tag{۴۴.۴}$$

با استفاده از (۴۴.۴) در (۴۳.۴) برای $|\delta|\ge 1$ و $|z|=1$ داریم:

$$|\delta||D_{\frac{1}{\overline{\delta}}}p(z)| \le \frac{n(|\delta|k^t+1)}{1+k^t}\max_{|z|=1}|p(z)| - \frac{nk^t(|\delta|-1)}{1+k^t}\frac{1}{k^n}\min_{|z|=k}|p(z)|$$

حال α را با $\frac{1}{\overline{\delta}}$ جایگزین می‌کنیم، به طوری که $|\alpha|\le 1$ از نامساوی قبل برای $|\alpha|\le 1$ و $|z|=1$ بدست می‌آوریم:

$$|D_\alpha p(z)| \le \frac{n(|\alpha|+k^t)}{1+k^t}\max_{|z|=1}|p(z)| - \frac{n(1-|\alpha|)}{k^{n-t}(1+k^t)}\min_{|z|=k}|p(z)|$$

و لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

نامساوی بهترین نتیجه ممکن است و تساوی در (۴۲.۴) برای $p(z)=(z^\mu+k^\mu)^{\frac{n}{\mu}}$ که n حاصل‌ضربی از μ و $\alpha\ge 0$ برقرار است.

لم بعدی که در ادامه ارائه می‌دهیم از عزیز و شاه [۱۱] است.

لم ۲۲.۱.۴. *اگر $p(z)=a_0+\sum_{j=t}^{n}a_jz^j$، $t\ge 1$ چندجمله‌ای از درجه n باشد که هیچ صفری در $|z|<k$، $k\ge 1$ نداشته باشد، آن‌گاه روی $|z|=1$ وقتی که $q(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\overline{z}})}$ داریم:*

$$|q'(z)| \ge k^t|p'(z)| + n\min_{|z|=k}|p(z)| \tag{۴۵.۴}$$

لم ۲۳.۱.۴. *اگر $p(z)=a_nz^n+\sum_{j=t}^{n}a_{n-j}z^{n-j}$، $1\le t\le n$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد که همه صفرهایش در $|z|\le k\le 1$ باشند، آن‌گاه روی $|z|=1$ وقتی که $q(z)=z^n\overline{p(\frac{1}{\overline{z}})}$ داریم:*

$$|q'(z)| \le k^t|p'(z)| - \frac{n}{k^{n-t}}\min_{|z|=k}|p(z)| \tag{۴۶.۴}$$

برهان. اگر همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq k$ که $0 < k \leq 1$ باشند، آن‌گاه همه صفرهای چندجمله‌ای $q(z) = \overline{a}_n + \sum_{j=t}^{n} \overline{a}_{n-j} z^j$ در $|z| \geq \frac{1}{k}$، $\frac{1}{k} \geq 1$ واقع‌اند. بنابراین با بکار بردن لم ۲۲.۱.۴ برای $q(z)$ داریم:

$$|p'(z)| \geq \frac{1}{k^t}|q'(z)| + n \min_{|z|=\frac{1}{k}} |q(z)| = \frac{1}{k^t}|q'(z)| + \frac{n}{k^n} \min_{|z|=k} |p(z)|$$

در نتیجه

$$k^t|p'(z)| \geq |q'(z)| + \frac{n}{k^{n-t}} \min_{|z|=k} |p(z)|$$

که معادل با (۴۶.۴) است.

□

لم ۲۴.۱.۴. *برای $k \leq 1$ و $\mu \geq 1$ تابع* $S_\mu(x) = \dfrac{nxk^{2\mu} + \mu|a_{n-\mu}|k^{\mu-1}}{nxk^{\mu-1} + \mu|a_{n-\mu}|}$ *یک تابع ناصعودی از x است.*

برهان. با گرفتن تست مشتق از $S_\mu(x)$ نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

□

لم ۲۵.۱.۴. *اگر* $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *یک چندجمله‌ای از درجه n باشد و در $|z| \leq k$، $k > 0$، $p(z) = 0$، آن‌گاه برای $|z| \leq \frac{1}{k}$، $|q(z)| \geq \frac{m}{k^n}$، که در آن $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ و در حالت خاص $|a_n| > \frac{m}{k^n}$.*

برهان. اگر در $|z| \leq k$، $p(z) = 0$ آن‌گاه برای $|z| \leq \frac{1}{k}$، $q(z) \neq 0$. بدون این که از کلیت قضیه کم شود فرض می‌کنیم $q(z)$ هیچ صفری در $|z| = \frac{1}{k}$ نداشته باشد، در غیر این صورت نتیجه به وضوح برقرار است. از آن جایی که $q(z)$ یک چندجمله‌ای است برای $|z| \leq \frac{1}{k}$ تحلیلی است و هیچ صفری در $|z| \leq \frac{1}{k}$ ندارد. از اصل ماکسیمم قدرمطلق برای $|z| \leq \frac{1}{k}$ داریم:

$$|q(z)| \geq \min_{|z|=\frac{1}{k}} |q(z)|,$$

لذا

$$|q(z)| \geq \frac{1}{k^n} \min_{|z|=k} |p(z)|,$$

پس در حالت خاص

$$|a_n| = |q(0)| > \frac{m}{k^n},$$

و اثبات لم کامل می‌شود.

□

لمی که در ادامه ارائه می‌دهیم از گاردنر، گوویل و وییمز [۲۱] است.

لم ۲۶.۱.۴. *اگر* $p(z) = a_\circ + \sum_{j=\mu}^{n} a_j z^j$، $1 \leq \mu \leq n$ *یک چندجمله ای از درجه* n *باشد به طوری که برای* $|z| < k$، $k \geq 1$، $p(z) \neq \circ$ *و* $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ *، آن‌گاه داریم:*

$$\frac{|a_\mu| k^\mu}{|a_\circ| - m} \leq \frac{n}{\mu}. \tag{۴۷.۴}$$

لم ۲۷.۱.۴. [۱۹] *اگر* $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$، $1 \leq \mu \leq n$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $1 \leq k \leq |z|$ *باشند و* $A_\mu = \dfrac{n(|a_n| - \frac{m}{k^n})k^{2\mu} + \mu |a_{n-\mu}| k^{\mu-1}}{n(|a_n| - \frac{m}{k^n})k^{\mu-1} + \mu |a_{n-\mu}|}$ *، آن‌گاه داریم:*

$$A_\mu \leq k^\mu. \tag{۴۸.۴}$$

قضیه ۲۸.۱.۴. [۱۹] *فرض کنید* $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$، $1 \leq \mu \leq n$ *یک چندجمله ای از درجه* n *باشد و همه صفرهایش در* $1 \leq k \leq |z|$ *واقع باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *که* $|\alpha| \geq k^\mu$ *، که در آن* $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$ *و* A_μ *تعریف شده در لم قبل، داریم:*

$$\begin{aligned}\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq & \frac{n(|\alpha| - k^\mu)}{(1 + k^\mu)} \max_{|z|=1} |p(z)| + n\left(\frac{|\alpha| + 1}{k^{n-\mu}(1 + k^\mu)}\right) m \\ & + n\left(\frac{k^\mu - A_\mu}{1 + k^\mu}\right) \max_{|z|=1} |p(z)| + \frac{n(A_\mu - k^\mu)}{k^n(1 + k^\mu)} m.\end{aligned} \tag{۴۹.۴}$$

برهان. بنا به فرض همه صفرهای چندجمله‌ای

$$p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}, 1 \leq \mu \leq n$$

در $1 \leq k \leq |z|$ قرار دارند. اگر $p(z)$ یک صفر در $|z| = k$ داشته باشد، آن‌گاه $m = \circ$ و نتیجه از لم ۲۰.۱.۴ به وضوح برقرار است. حال فرض کنیم همه صفرهای $p(z)$ در $1 \leq k < |z|$ قرار دارند، بنابراین $m > \circ$. حال برای $|z| = k$، $m \leq |p(z)|$ ، پس اگر λ هر عدد حقیقی یا مختلطی باشد که $|\lambda| < 1$، آن‌گاه برای $|z| = k$ داریم:

$$|\frac{m\lambda z^n}{k^n}| < |p(z)|$$

از آن جایی که همه صفرهای $p(z)$ در $k < |z|$ واقع‌اند، از قضیه روشه نتیجه می‌شود که همه صفرهای $p(z) - \frac{m\lambda z^n}{k^n}$ نیز در $k < |z|$ واقع‌اند. بنابراین از لم ۸.۱.۴ برای $|\alpha| \geq k^\mu$ همه صفرهای چندجمله‌ای

$$D_\alpha\left[p(z) - \frac{m\lambda z^n}{k^n}\right] = D_\alpha p(z) - \frac{\lambda m n \alpha z^{n-1}}{k^n}. \tag{۵۰.۴}$$

به ازای هر λ که $|\lambda| < ۱$ در $۱ \leq k < |z|$ واقع‌اند. برای $|z| \geq k$ و $|\alpha| \geq k^{\mu}$ داریم:

$$|D_{\alpha}p(z)| \geq \frac{mn|\alpha||z|^{n-۱}}{k^n}. \quad (۵۱.۴)$$

زیرا اگر (۵۱.۴) نادرست باشد، آن‌گاه یک نقطه $z = z_{\circ}$ که $|z_{\circ}| \geq k$ وجود دارد، به طوری که

$$|\{D_{\alpha}p(z)\}_{z=z_{\circ}}| \leq |\frac{mn\alpha z_{\circ}^{n-۱}}{k^n}|,$$

حال

$$\lambda = \frac{k^n\{D_{\alpha}p(z)\}_{z=z_{\circ}}}{mn\alpha z_{\circ}^{n-۱}},$$

انتخاب می‌کنیم به طوری که $|\lambda| < ۱$ و با این انتخاب از λ در (۵۰.۴) برای $|z_{\circ}| \geq k$ داریم:

$$D_{\alpha}\{p(z) - \frac{m\lambda z^n}{k^n}\} = \circ$$

لذا با این حقیقت که صفرهای $D_{\alpha}\{p(z) - \frac{m\lambda z^n}{k^n}\}$ در $۱ \leq k < |z|$ قرار دارند تناقض دارد.
چون همه صفرهای چندجمله‌ای $p(z) - \frac{m\lambda z^n}{k^n}$ در $۱ \leq k \leq |z|$ واقع‌اند، می‌توانیم لم ۲۰.۱.۴ را برای $p(z) - \frac{m\lambda z^n}{k^n}$ به کار ببریم و برای $|\alpha| \geq k^{\mu} \geq S'_{\mu}$ و $|z| = ۱$ بدست می‌آوریم

$$|D_{\alpha}\{p(z) - \frac{m\lambda z^n}{k^n}\}| \geq n\left(\frac{|\alpha| - S'_{\mu}}{۱ + k^{\mu}}\right)|p(z) - \frac{m\lambda z^n}{k^n}|. \quad (۵۲.۴)$$

به طوری که

$$S'_{\mu} = \frac{n|a_n - \frac{m\lambda}{k^n}|k^{۲\mu} + \mu|a_{n-\mu}|k^{\mu-۱}}{n|a_n - \frac{m\lambda}{k^n}|k^{\mu-۱} + \mu|a_{n-\mu}|}. \quad (۵۳.۴)$$

لذا به ازای هر λ که $|\lambda| < ۱$ داریم:

$$|a_n - \frac{m\lambda}{k^n}| \geq |a_n| - \frac{m|\lambda|}{k^n} \geq |a_n| - \frac{m}{k^n}. \quad (۵۴.۴)$$

و از لم ۲۵.۱.۴، $|a_n| > \frac{m}{k^n}$. حال با ترکیب نامساوهای (۵۳.۴)، (۵۴.۴) و لم ۲۴.۱.۴ به ازای هر λ که $|\lambda| < ۱$ داریم:

$$S'_{\mu} = \frac{n|a_n - \frac{m\lambda}{k^n}|k^{۲\mu} + \mu|a_{n-\mu}|k^{\mu-۱}}{n|a_n - \frac{m\lambda}{k^n}|k^{\mu-۱} + \mu|a_{n-\mu}|} \leq \frac{n(|a_n| - \frac{m}{k^n})k^{۲\mu} + \mu|a_{n-\mu}|k^{\mu-۱}}{n(|a_n| - \frac{m}{k^n})k^{\mu-۱} + \mu|a_{n-\mu}|} = A_{\mu}. \quad (۵۵.۴)$$

فرض کنیم $z_۰$ روی $|z| = ۱$ باشد به طوری که $|p(z_۰)| = \max_{|z|=۱} |p(z)|$. بنابراین از نامساوی‌های (۵۰.۴) ،(۵۲.۴) و (۵۵.۴) داریم:

$$\begin{aligned}|\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰} - (\frac{\lambda mn\alpha z_۰^{n-۱}}{k^n})| &\geq n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)|p(z_۰) - \frac{m\lambda z_۰^n}{k^n}| \\ &\geq n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\left\{|p(z_۰)| - \frac{m|\lambda||z_۰|^n}{k^n}\right\} \\ &= \frac{n(|\alpha| - A_\mu)}{۱ + k^\mu}|p(z_۰)| - n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\frac{m|\lambda|}{k^n}, \qquad (۵۶.۴)\end{aligned}$$

اگر در (۵۶.۴) آرگومانی از λ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که

$$|\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰} - (\frac{\lambda mn\alpha z_۰^{n-۱}}{k^n})| = |\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰}| - (\frac{mn|\alpha||\lambda||z_۰|^{n-۱}}{k^n}),$$

به طوری که از (۵۱.۴) نتیجه می‌شود

$$|\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰}| - (\frac{mn|\alpha||\lambda||z_۰|^{n-۱}}{k^n}) \geq n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)|p(z_۰)| - n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\frac{m|\lambda|}{k^n}. \qquad (۵۷.۴)$$

از آن جایی که $z_۰$ روی $|z| = ۱$ واقع است و $|p(z_۰)| = \max_{|z|=۱} |p(z)|$، نامساوی (۵۷.۴) معادل است با

$$|\{D_\alpha p(z)\}_{z=z_۰}| \geq n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\max_{|z|=۱}|p(z)| - n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\frac{m|\lambda|}{k^n} + \frac{mn|\alpha||\lambda|}{k^n},$$

در نتیجه

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\max_{|z|=۱}|p(z)| - n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\frac{m|\lambda|}{k^n} + \frac{mn|\alpha||\lambda|}{k^n}. \qquad (۵۸.۴)$$

حال با قرار دادن $|\lambda| \to ۱$ در نامساوی (۵۸.۴) خواهیم داشت

$$\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq n\left(\frac{|\alpha| - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\max_{|z|=۱}|p(z)| + \frac{mn}{k^n}\left(\frac{|\alpha|k^\mu + A_\mu}{۱ + k^\mu}\right),$$

که معادل است با

$$\begin{aligned}\max_{|z|=۱}|D_\alpha p(z)| \geq \frac{n(|\alpha| - k^\mu)}{(۱ + k^\mu)}\max_{|z|=۱}|p(z)| + n\left(\frac{|\alpha| + ۱}{k^{n-\mu}(۱ + k^\mu)}\right)m \\ + n\left(\frac{k^\mu - A_\mu}{۱ + k^\mu}\right)\max_{|z|=۱}|p(z)| + \frac{n(A_\mu - k^\mu)}{k^n(۱ + k^\mu)}m,\end{aligned}$$

و لذا نتیجه دلخواه برقرار است.

□

قضیه ۲۹.۱.۴. [۱۹] *اگر* $p(z) = a_n z^n + \sum_{j=\mu}^{n} a_{n-j} z^{n-j}$، $1 \leq \mu \leq n$ *یک چندجمله‌ای از درجه* n *باشد که همه صفرهایش در* $|z| \leq k \leq 1$ *باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد حقیقی یا مختلط* α *که* $|\alpha| \geq k^\mu$ *داریم:*

$$\max_{|z|=1} |D_\alpha p(z)| \geq \frac{n(|\alpha| - k^\mu)}{(1 + k^\mu)} \max_{|z|=1} |p(z)| + \frac{n(|\alpha| + 1)}{k^{n-\mu}(1 + k^\mu)} m. \qquad (۵۹.۴)$$

به طوری که $m = \min_{|z|=k} |p(z)|$.

در حقیقت، بجز در مواردی که $k = 1$ یا $\frac{\mu}{n}\left(\frac{|a_{n-\mu}|}{|a_n| - \frac{m}{k^n}}\right) = k^\mu$ کران بدست آمده در قضیه ۲۸.۱.۴ همیشه بهبودیافته‌تر از کران بدست آمده در قضیه ۲۹.۱.۴ است. برای این موضوع کافیست نشان دهیم که

$$n\left(\frac{k^\mu - A_\mu}{1 + k^\mu}\right) \max_{|z|=1} |p(z)| + \frac{n(A_\mu - k^\mu)}{k^n(1 + k^\mu)} m \geq 0$$

و معادل است با

$$n\left(\frac{k^\mu - A_\mu}{1 + k^\mu}\right) \max_{|z|=1} |p(z)| \geq \frac{n\left(k^\mu - A_\mu\right)}{k^n\left(1 + k^\mu\right)} m \qquad (۶۰.۴)$$

با در نظر گرفتن نامساوی (۴۸.۴) از لم ۲۷.۱.۴، نامساوی بالا معادل با نامساوی زیر خواهد بود

$$\max_{|z|=1} |p(z)| \geq \frac{m}{k^n} \qquad (۶۱.۴)$$

حال با استفاده از نامساوی (۴۶.۴) در لم ۲۳.۱.۴ خواهیم داشت

$$|q'(z)| \leq k^t n \max_{|z|=1} |p(z)| - \frac{nk^t}{k^n} m = nk^t \left\{\max_{|z|=1} |p(z)| - \frac{m}{k^n}\right\}$$

نامساوی بالا صحیح است بنابراین نامساوی (۶۱.۴) نیز برقرار خواهد بود.

مراجع

[1] N. Ankeny, T. J. Rivlin, *On a theorem of S. Bernstein*, Pacific J . Math. 5 (1955) 849-852.

[2] A. Aziz, Q. M. Dawood, *Inequalities for a polynomial and its derivative*, J . Approx. Theory 53 (1988) 155-162.

[3] A. Aziz, N. Ahmed, *A refinement of a theorem of Paul Turan concerning polynomials*, Math. Ineq. Appl. 1 (1998), 231-238.

[4] A. Aziz, W. M. Shah, *Some inequalities for the polar derivative of a polynomial*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math sci), 107 (1997) 263-270.

[5] A. Aziz, *Inequalities for a polynomial derivative of a polynomial*, J. Proc. Amer. Math. soc. 80 (1980) 155-162.

[6] A. Aziz, W. M. Shah, *Inequalities for the polar derivative of a polynomial*, Indian J. Pure appl. Math. 29(2) (1998) 163-173.

[7] A. Aziz, Q. G. Mohammad, *Inequalities for the derivative of a polynomial*, J. Approx. Theory 55 (1988) 183-193.

[8] A. Aziz, N. A. Rather, *A refinement of a theorem of Paul Turan concerning polynomials*, Mathematical Inequalities and Applications, vol. 1, no. 2, pp. (1998) 231-238.

[9] A. Aziz, *Inequalities for the derivative of a polynomial*, Proceeding of the American Mathematical socciety, vol. 89, no. 2, pp. (1983) 259-266.

[10] A. Aziz, W. M. Shah, *An integral mean estimate for polynomial*, Indian J. Pure Appl Math. 28 (1997) 1413-1419.

[11] A. Aziz, W. M. Shah, *L^p inequalities for polynomials with restricted zeros*, Glas. Math. 32 (1997) 247-258.

[12] M. Bidkham, M. Shakeri, M. Eshaghi Gordji *Inequalities for the polar derivative of a polynomial*, Journal of Inequalities and Applications, (2009) 1-9.

[13] N. G. Bruijn, *Inequalities concerning polynomials in the complex domain*, Nederl. Asad. Wetench. Proc. Ser. A, (1947) 591-598.

[14] T. N. Chan, M. A. Malik, *On Erdos-Lax theorem*, Proc. Indian Acad. Sci. 92 (1983) 191-193

[15] K. K. Dewan, N. K. Govil, Abdullah. Mir, M. S. Puktha, *Inequalities to polar derivative of polynomials*, J. Ineq. and Appl. 7, 1 (2006) 301-312.

[16] K. K. Dewan, N. K. Govil, Abdullah. Mir, M. S. Puktha, *Inequalities for the derivative of a polynomial*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 269, no. 2 (2002) 489-499.

[17] K. K. Dewan, N. Singh, A. Mir, *Growth of polynomials not vanishing inside a circle*, International Journal of Mathematical Analysis, vol. 1, no. 9-12 (2007) 529-538.

[18] K. K. Dewan, C. M. Upadhye *Inequalities for the polar derivative of a polynomial*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, vol. 9 (2008) 1-9.

[19] K. K. Dewan, N. Singh, A. Mir, *Extensions of some polynomial inequalities to the polar derivative*, J. Math. Anal. Appl. 352 (2009) 807-815.

[20] C. Frappier, Q. I. Rahman, St. Ruscheweyh *Generalization of an inequality involving maximum moduli of a polynomial and its polar derivative*, Trans. Amer. Math. Soc. 288 (1983) 69

[21] R. B. Gardner, N. K. Govil, A. Weems, *Some results concerning rate of growth of polynomials*, East Journal on Approximations, Vol. 10, no. 3 (2004) 301-312.

[22] A. Giroux, Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *On Bernstein's innequality*, Canad. J. Math. 31 (1979) 347-353.

[23] N. K. Govil, *Inequalities to polar derivative of a polynomial*, Journal of Inequalities and Applications 7, 5, 623 (2002).

[24] N. K. Govil, *Some inequalities for derivative of a polynomial*, J. Approx. theory 66 (1991) 29-35.

[25] N. K. Govil, *On the derivative of a polynomial*, Proc. Amer. Math. soc. 41 (1973) 543-546.

[26] N. K. Govil, G. N. McTume, *Some generalizations involving the polar derivative for an inequality of Paul Turan*, Acta. Math. Hungar. 104 (2004) 115-125.

[27] N. K. Govil, Q. I. Rahman, G. Schmeisser , *On the derivative of a polynomial*, Illinois J. Math. 23 (1979) 319-329.

[28] N. K. Govil, G. N. McTume, *Some generalizations involving the polar derivative for an inequality of Paul Turan*, Acta. Math. Hungar. 104 (2006) 109-117.

[29] V. k. Jain, *Generalization of an inequality involving maximum moduli of a polynomial and its polar derivative*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome. 50(98) (2007) 67-74.

[30] P. D. Lax, *Proof of a conjecture of P. Erdos on the derivative of a polynomial*, Bull. Amer. Math. soc. 50 (1944) 509-513.

[31] M. A. Malik, *On the derivative of a polynomial*, Journal of the London Mathematical Society, Vol. 1, (1969) 57-60.

[32] M. Marden, *Geometry of polynomials*, Mathematical Surveys, No. 3, Am. Math. Soc, (1966).

[33] A. Mir, S. A. Baba *Inequalities concerning to polar derivative of polynomials*, Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 32, No 2, (2011) 114-119.

[34] W. M. Shah, A. Aziz, *An integral mean estimate for polynomials*,Indian J. Pure Appl. Math. 28 (1997) 1413-1419.

[35] P. Turan, *Inequalities to polar derivative of polynomials*, Composition Math. 7, 89 (1939) 89-85.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

بهبود .... Refinement

تحلیلی .... Analytic

تخمین .... Estimate

تساوی .... Equality

تعمیم .... Generalization

چندجمله ای .... Polynomial

حقیقی .... Real

خاص .... Special

گسترش .... Extension

دقیق .... Sharp

درجه .... Degree

رده .... Class

صفر .... Zero

مثبت .... Positive

مختلط .... Complex

مشتق .... Derivative

معادل .... Equivalent

ممکن .... Possible

ناحیه .... Region

نامساوی .... Inequality

نتیجه .... Result

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

تحلیلی	Analytic
رده	Class
مختلط	Complex
درجه	Degree
مشتق	Derivative
تساوی	Equality
معادل	Equivalent
تخمین	Estimate
گسترش	Extension
تعمیم	Generalization
نامساوی	Inequality
چندجمله ای	Polynomial
مثبت	Positive
ممکن	Possible
حقیقی	Real
بهبود	Refinement
ناحیه	Region

نتیجه .... Result

دقیق .... Sharp

خاص .... Special

صفر .... Zero

Surname: Hosseini | Name: S Asie

Title: Inequalities for the polar derivative of a polynomial

Supervisor: Ahmad Zireh

Advisor: Ebrahim Hashemi

Degree: Master of Science | Subject: Pure Mathematics

Field: Mathematical Analysis

Shahrood university of technology | Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2012 | Number of pages: 67

Keywords: Polar derivative; Polynomial; Maximum modulus

Abstract

In this thesis, we express inequalities for the polar derivative of a polynomail and obtain refinements of famous inequalities of Aziz, Dewan and other famous results in this direction.

Shahrood university of technology
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

Inequalities for the polar derivative of a polynomial

Supervisor

Ahmad Zireh

Advisor

Ebrahim Hashemi

by

S Asie Hosseini

2012