دانشکده علوم

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبات

عنوان

بالابری یالی و احاطه‌گری کلی در گراف‌ها

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

پژوهشگر

میترا خزائی

تیر ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: خزائی نام: میترا

عنوان: بالابری یالی و احاطه گری کلی در گراف‌ها

استاد راهنما: دکتر نادر جعفری راد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: گراف و ترکیبات

دانشگاه: صنعتی شاهرود دانشکده علوم
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۶۲

واژگان کلیدی: بالابریالی، احاطه گری، احاطه گری کلی

چکیده

فرض کنید u و v دو راس از گراف G باشند به طوری که به فاصله دو از یکدیگر قرار گرفته باشند و x همسایگی مشترک u و v باشد. منظور از یک بالابریالی در گراف G حذف یال‌های ux و xv، و اضافه کردن یال uv می باشد.
در فصل اول این پایان نامه مفاهیم و مقدمات نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیازمندیم را یادآوری می کنیم.
در فصل دوم تاثیر بالابریالی روی عدد احاطه گری در گراف‌ها را به طور کامل بررسی خواهیم کرد.
در فصل سوم تاثیرات بالابریالی روی عدد احاطه گری کلی در یک گراف را مورد مطالعه قرار می دهیم.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...

ای خدای بزرگ! با اتکاء به ایمان به تو و با توکل و رضای کامل به فرمان تقدیرت و به خاطر رسالت بزرگی که بر دوش‌ها گذاشته‌ای و به یاد علی(ع)، بی همتای انسانیت و به راه حسین، بزرگ شهید عالم خلقت، من گستاخانه و عاشقانه در دریاهای مرگ شنا می کنم و در طوفان‌های حوادث غرق می شوم و با اژدهای مرگ پنجه در می افکنم و با شمشیر شهادت سینه‌ی ظلم و کفر را می درم و با اتکاء به ایمان به تو در مقابل همه‌ی عالم می ایستم و با اراده‌ی آهنین، جبر زمان را به خاک می‌سایم.

مناجاتی از شهید آوینی

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است.

از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر نادر جعفری راد نهایت تشکر و قدردانی را دارم که در کمال سعه صدر، با حسن‌خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند.

با درود بیکران بر روان پاک پدرم و سپاس فراوان از مادر عزیزم، که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده، کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم‌داشت برای من بوده‌اند و با تقدیر و سپاس فراوان از همگامی و صبوری همسفر زندگیم که همواره مشوق من در این مسیر و مایه دلگرمی‌ام بوده است.

میترا خزائی
تیر ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست مطالب ج

لیست تصاویر خ

۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی ۲
۱.۱ مقدمه ۲
۲.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی ۲
۳.۱ احاطه گری ۱۱
۴.۱ احاطه گری کلی ۱۳

۲ ۱۵
۱.۲ مقدمه ۱۵
۲.۲ تعاریف و نمادهای مقدماتی ۱۶
۳.۲ دسته بندی گراف‌ها ۱۷
۴.۲ هدف اصلی ۲۲

۳ ۳۰
۱.۳ مقدمه ۳۰
۲.۳ تعاریف و نمادهای مقدماتی ۳۱
۳.۳ تاثیرات بالابر یالی روی عدد احاطه گری کلی یک گراف ۳۱
۴.۳ دسته بندی گراف‌ها ۴۰
۵.۳ خانواده F_1 ۴۱
۶.۳ خانواده ی F_2 ۴۲

۷.۳ خانواده $F_۳$ و $F_۴$ ۴۳
۸.۳ خانواده $F_۵$ ۴۴

آ توپولوژی‌های روی فضاهای اندازه‌ها و ارزیابی‌ها **۵۲**
۱.آ توپولوژیِ مبهمِ روی فضای اندازه‌ها ۵۲

مراجع **۵۵**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۵۷**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۵۹**

لیست تصاویر

۱.۱ دو یال موازی ۳
۲.۱ گراف کامل $K_۶$ ۵
۳.۱ گراف دو بخشی کامل $K_{۳,۳}$ ۶
۴.۱ گراف G و متمم آن ۶
۵.۱ گشت بسته ۸
۶.۱ گراف همبند ۹
۷.۱ گراف ناهمبند ۹
۸.۱ هزارپا ۱۰
۹.۱ رشته ۱۰
۱۰.۱ $\gamma(G) = ۱$ ۱۲
۱۱.۱ $\gamma_t(G) = ۲$ ۱۴

۱.۲ تاجی گراف‌های G و H ۱۶
۲.۲ $\gamma(G_x^{uv}) = ۳$ $\gamma(G) = ۴$ ۱۹
۳.۲ $\gamma(G_x^{uv}) = ۴$ $\gamma(G) = ۲$ ۲۰
۴.۲ $\gamma(G_x^{uv}) = ۲$ $\gamma(G) = ۲$ ۲۰
۵.۲ $\gamma(G_x^{uv}) = ۳$ $\gamma(G) = ۴$ ۲۱
۶.۲ $\gamma(G_x^{uv}) = ۴$ $\gamma(G) = ۴$ ۲۱
۷.۲ $\gamma(G_x^{uv}) = ۴$ $\gamma(G) = ۴$ ۲۱

۱.۳ گراف G ۳۲
۲.۳ گراف G_x^{uv} ۳۲
۳.۳ شکل ۴.۳ ۳۳

۴.۳ گراف G . . . ۳۴
۵.۳ گراف G_x^{uv} . . . ۳۴
۶.۳ گراف G . . . ۳۵
۷.۳ گراف G_x^{uv} . . . ۳۵
۸.۳ گراف G . . . ۳۶
۹.۳ گراف G_x^{uv} . . . ۳۶
۱۰.۳ گراف G . . . ۳۶
۱۱.۳ گراف G_x^{uv} . . . ۳۷

فصل ۱
تعاریف و نمادهای مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در دنیای اطراف ما، بسیاری از وضعیت‌ها را می‌توان به راحتی به وسیله‌ی نموداری متشکل از مجموعه‌ای از نقاط و خطوطی که زوج‌های معینی از این نقاط را به هم وصل می‌کنند، توصیف کرد. مثلا نقاط می‌توانند معرف افراد باشند و خطوط واصل بین زوج‌ها می توانند معرف دوست‌ها باشند و یا نقاط ممکن است مراکز ارتباطی و خطوط معرف ارتباط‌های بین آن‌ها باشند.
در چنین نمودارهایی آن‌چه بیشتر مورد توجه است، آن است که آیا دو نقطه‌ی مفروض به وسیله‌ی یک خط به هم وصل شده اند یا نه؟

وجود چنین مسایلی، به پیدایش مفهوم گراف منجر شده است.

در بخش اول این فصل به تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی نظریه‌ی گراف می‌پردازیم و برای مفاهیم دیگری که در اینجا ذکر نمی‌شود، خواننده را به مراجع [۲] و [۲۷] ارجاع می‌دهیم.

در بخش‌های دوم و سوم مفاهیم احاطه‌گری و احاطه‌گری کلی را معرفی می‌کنیم.

۲.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

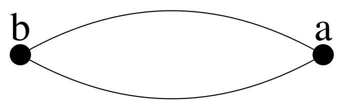
تعریف ۱.۲.۱. گراف G یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi_G)$، متشکل از مجموعه‌ی ناتهی $V(G)$ از راس‌ها، مجموعه‌ی $E(G)$ از یال‌ها و تابع وقوع ψ_G است که به هر یال G، یک جفت نامرتب (نه لزوما مجزا) از راس‌های G را همراه می‌کند.

اگر e یک یال و u, v راس‌هایی باشند به قسمی که $\psi_G(e) = uv$، آن‌گاه می‌گویند e، u را به v وصل می‌کند و راس‌های u و v را دو انتهای e می‌نامند. به یالی که شامل رئوس انتهایی یکسان باشد، طوقه می‌گویند.

در سرتاسر این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم گراف G به صورت دوتایی $(V(G), E(G))$ است. حرف G نشان دهنده‌ی گراف است. در این صورت حرف G را از نمادهای نظری حذف می‌کنیم. البته اگر به وضوح مطالب آسیبی نرساند. مثلا به جای نمایش دوتایی $(V(G), E(G))$ از نمایش (V, E) استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. اگر مجموعه‌ی راس‌ها و یال‌های گراف متناهی باشند، گراف متناهی است. در اینجا تنها گراف‌های متناهی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بنابراین اصطلاح گراف را به معنای گراف متناهی در نظر می‌گیریم. گرافی با تنها یک راس را گراف بدیهی و دیگر گراف‌ها را نابدیهی می‌گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. دو یال را موازی می‌گوییم، هر گاه دارای رئوس انتهایی یکسان باشند. مثلا در شکل زیر یال‌ها موازیند.



شکل ۱.۱: دو یال موازی

تعریف ۴.۲.۱. دو راس را مجاور گوییم، هرگاه توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند.

تعریف ۵.۲.۱. اگر راس v از یک گراف G، نقطه‌ی انتهایی یال e باشد، آن‌گاه راس v با یال e متلاقی است.
همیشه یک یال، با یک یا دو راس متلاقی است، در حالی که یک راس ممکن است با هر تعداد متناهی یال، متلاقی باشد.

تعریف ۶.۲.۱. دو یال را مجاور گوییم، هرگاه با یک راس مشترک v متلاقی باشند.

تعریف ۷.۲.۱. گراف G را ساده نامیم هر گاه فاقد طوقه و یال های موازی باشد. قسمت عمده‌ی نظریه‌ی گراف، به مطالعه‌ی گراف‌های ساده مربوط است.

تعریف ۸.۲.۱. درجه‌ی راس v در G، تعداد یال‌های G است که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $deg(v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین درجه در میان درجات رئوس گراف G را با $\triangle(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V که $|V|=n$ ومجموعه یال‌های E باشد که $|E|=m$. همسایگی باز $v\in V$ را با $N_G(v)$ نشان می‌دهیم و عبارتست از مجموعه‌ای از رئوس، که با راس v از گراف G مجاور باشند. $N_G(v)\cup\{v\}$ را همسایگی بسته‌ی راس v نامیده و آن را با $N_G[v]$ نمایش می‌دهیم. اگر گراف G مورد بحث باشد آن گاه همسایگی باز و بسته را به ترتیب با $N(v)$ و $N[v]$ نشان می‌دهیم. همسایگی باز زیر مجموعه‌ی S از رئوس گراف G را به صورت $\bigcup_{v\in S}N(v)$ تعریف می‌کنیم و آن را با $N(S)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $N(S)\cup S$ را همسایه‌ی بسته‌ی S نامیده و آن را با $N[S]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید $S\subseteq V$ و $v\in S$ باشد. یک S**-همسایگی خصوصی** v[۱] را با $pn_G(v,S)$ و در صورت عدم اشتباه با $pn(v,S)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از

$$pn(v,S)=N(v)\setminus N(S\setminus\{v\}).$$

بنابراین اگر $u\in pn(v,S)$ آن‌گاه $N(u)\cap S=\{v\}$. در این صورت می‌گوییم u یک $S-$ همسایگی خصوصی v است.

تعریف ۱۱.۲.۱. یک $S-$**همسایگی خصوصی خارجی** v[۲] را با $epn(v,S)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از

$$epn(v,S)=pn(v,S)\cap(V\setminus S).$$

تعریف ۱۲.۲.۱. یک $S-$**همسایگی خصوصی داخلی** v[۳] را با $ipn(v,S)$ نشان می‌دهیم که عبارت است از

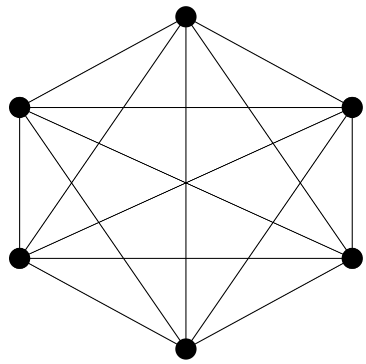
$$ipn(v,S)=pn(v,S)\cap S.$$

[۱] S-private neighborhood
[۲] external S-private neighborhood
[۳] internal S-private neighborhood

قضیه ۱۳.۲.۱. [۲] در هر گراف G با e یال و n راس $v_1, \cdots, v_n$ داریم $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2e$.

تعریف ۱۴.۲.۱. گرافی که در آن هر دو راس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشد، گراف کامل نامیده می‌شود.
یک گراف کامل n راسی را با K_n نشان می‌دهیم.

شکل زیر گراف کامل K_6 را نشان می‌دهد.



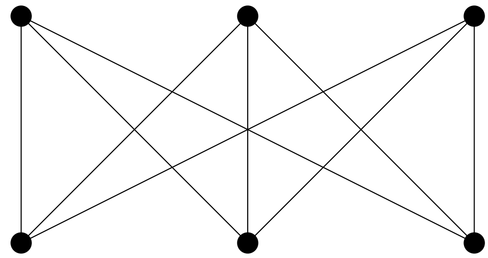
شکل ۲.۱: گراف کامل K_6

تعریف ۱۵.۲.۱. گراف دو بخشی گرافی است که مجموعه رئوس آن به دو زیر مجموعه‌ی X و Y چنان افراز شود که $X \cup Y = V$ و $X \cap Y = \varnothing$ و یک سر تمام یال‌ها در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد.

تعریف ۱۶.۲.۱. گراف دو بخشی، با بخش‌های X و Y که در آن هر راس X با هر راس Y مجاور باشد را گراف دو بخشی کامل می‌گوییم.
اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ باشد، آن‌گاه گراف دو بخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم که دارای mn یال می‌باشد.
معمولا هر گراف دو بخشی کامل، گراف کامل نمی‌باشد. تنها گراف دوبخشی کامل که گرافی کامل است، $K_{1,1}$ می‌باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. گراف k بخشی کامل، گرافی k بخشی است که در آن هر راس در یک بخش با تمام رئوس در بخش‌های دیگر مجاور است.

شکل زیر گراف دو بخشی کامل $K_{۳,۳}$ را نشان می‌دهد.

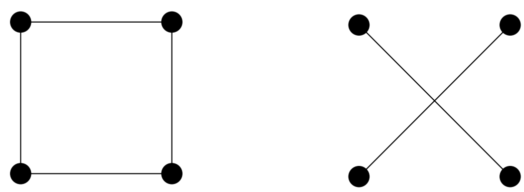


شکل ۳.۱: گراف دو بخشی کامل $K_{۳,۳}$

تعریف ۱۸.۲.۱. گراف k−منتظم، گرافی است که هر راس آن از درجه‌ی k باشد. گراف کامل K_n، گرافی $(n-۱)$−منتظم است. گراف دو بخشی کامل $K_{n,n}$، گرافی n−منتظم است.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید G، گرافی n راسی باشد، متمم گراف G را با $\bar{G}$ نشان داده، به طوری که $V(G) = V(\bar{G})$ و دو راس مانند u و v در $\bar{G}$ مجاور هستند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

شکل ۴.۱ گراف G و متمم آن را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۱: گراف G و متمم آن

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنید دو گراف $G = (V, E)$ و $H = (V', E')$ را داشته باشیم. H زیرگراف G است، هرگاه $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ باشد. در این صورت می‌گوییم G ابرگراف H است.

اگر $H \subseteq G$ اما $H \neq G$ باشد، به عبات دیگر $V' \neq V$ یا $E' \neq E$ باشد، در این صورت می‌گوییم H زیر گراف سره از G است.

H زیر گراف فراگیر G است، هر گاه $V = V'$ باشد. به عبارت دیگر G و H دقیقا تعداد رئوس یکسان داشته باشند.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با حداقل دو راس باشد، زیر گرافی از G با حذف راس v و یال‌هایی از G که شامل راس انتهایی v باشند، را زیر گراف حذف شده‌ی راسی می‌گوییم. همچنین زیر گرافی از G که از حذف یال e، از مجموعه یال‌های G (بدون حذف رئوس انتهایی) بدست آید را زیر گراف حذف شده ی یالی می‌گوییم.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید U زیر مجموعه ای ناتهی، از مجموعه رئوس V در G باشد. زیر گرافی از G، با مجموعه رئوس U و مجموعه یال‌هایی که هر دو راس انتهایی آن در U باشد، را القا شده توسط U گوییم و با $G[U]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید F زیر مجموعه‌ای ناتهی، از مجموعه یال‌های E از گراف G باشد. زیر گرافی از G، با مجموعه یال‌های F و مجموعه‌ای از رئوس که نقطه‌ی انتهایی از یال‌های F هستند، را القا شده توسط F گوییم و با $G[F]$ نشان می‌دهیم.

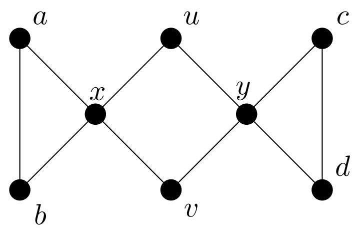
تعریف ۲۴.۲.۱. یک گشت در گراف G، دنباله ای متناوب از رئوس ویال ها به صورت $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲\cdots v_{k-۱}e_kv_k$ می باشد، به طوری که برای هر $۱ \leq i \leq k$ یال e_i، دارای رئوس انتهایی v_i و $v_{i-۱}$ باشد. به گشت فوق یک $v_۰ - v_k$ گشت، یا گشت از $v_۰$ به v_k نیز می گوییم. به راس $v_۰$ ابتدای گشت و به v_k پایانه ی گشت و به رئوس $v_۱, \cdots, v_{k-۱}$ رئوس داخلی می گوییم. به تعداد یال های موجود در گشت طول گشت می گوییم.

تعریف ۲۵.۲.۱. ابتدا و پایانه یک گشت لزومی ندارد که متمایز باشند. همچنین در یک گشت ممکن است یال های تکراری موجود باشند. در یک $u - v$ گشت از گراف G اگر $u = v$ باشد، گشت را بسته و اگر $u \neq v$ باشد، گشت را باز می گوییم.

شکل ۴.۱ یک گشت بسته به طول ۱۲ را نشان می دهد، که به ترتیب از راس های $(a, b, x, v, y, d, c, y, u, x, a, x, a)$ می گذرد.

تعریف ۲۶.۲.۱. گشتی که شامل هیچ یالی نباشد را گشت بدیهی می‌گویند. مثلا برای هر راس v در G، $W = v$ که شامل صفر یال می‌باشد، را گشت بدیهی می‌گویند.

تعریف ۲۷.۲.۱. اگر یال‌های موجود در یک گشت متمایز باشند، گشت را گذر می‌گویند. به عبارت دیگر، گشتی که فاقد یال تکراری باشد، را گذر گویند.



شکل ۵.۱: گشت بسته

تعریف ۲۸.۲.۱. یک گذر بسته‌ی غیر بدیهی، که رئوس ابتدایی ودرونی آن متمایز باشند را دور می‌گویند. برای مثال $C = v_۱v_۲, \cdots, v_nv_۱$ یک دور است.

یک دور با k یال را یک k−دور می‌گویند. برای مثال، طوقه یک ۱−دور می‌باشد. یک k−دور، بسته به این که k زوج یا فرد باشد، را یک k−دور زوج یا k−دور فرد می‌گویند. یک ۳−دور را غالبا مثلث می‌نامند. یک دور با n راس را با C_n نشان می‌دهند.

تعریف ۲۹.۲.۱. گشتی که شامل رئوس متمایز باشد را مسیر می‌گویند. یک مسیر با n راس، که به طول $n - ۱$ باشد را با P_n نشان می‌دهند.

هر مسیر، یک گذر و یک گشت محسوب می‌شود، ولی عکس آن برقرار نیست.

قضیه ۳۰.۲.۱. [۲] فرض کنید u و v دو راس از گراف G باشند. هر $u - v$ گشت، شامل یک $u - v$ مسیر است. به عبارت دیگر، در هر گشت $W = ue_۱v_۱, \cdots, v_{k-۱}e_kv$ با حذف رئوس و یال‌های مورد نیاز می توان به یک زیر دنباله‌ی P از W، که یک $u - v$ مسیر است، دست یافت.

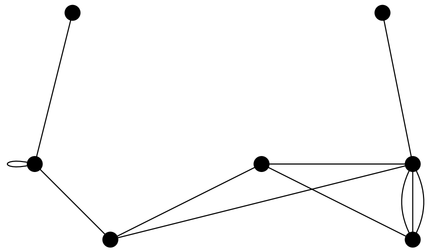
تعریف ۳۱.۲.۱. اگر در یک گراف G یک مسیر از راس u به راس v وجود داشته باشد، آن‌گاه می‌گویند u به v متصل است. اگر u به v متصل باشد آن‌گاه v نیز به u متصل است، اما با مسیر عکس.

تعریف ۳۲.۲.۱. اگر $W_۱ = ue_۱, \cdots, e_kv$ یک $u - v$ مسیر و $W_۲ = vf_۱, \cdots, f_tw$ یک $v - w$ مسیر باشد، آن‌گاه از اتصال این دو مسیر به یکدیگر یک $u - w$ گشت

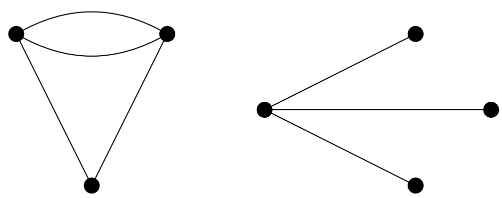
$W = ue_۱, \cdots, e_kvf_۱, \cdots, f_tw$ حاصل می شود. با استفاده از قضیه قبل این گشت لزوما شامل یک $u - w$ مسیر می‌باشد.

تعریف ۳۳.۲.۱. گراف G را همبند نامیم هرگاه بین هر دو راس آن یک مسیر موجود باشد. رابطه‌ی وجود مسیر یک رابطه‌ی هم ارزی در مجموعه راس‌های V است. بنابراین افرازی از V به زیر مجموعه‌های ناتهی $V_۱, V_۲, \cdots, V_w$ وجود دارد، به طوری‌که بین هر دو راس u و v مسیر وجود دارد اگر وتنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه ی V_i باشند. زیرگراف‌های القایی $G[V_۱], G[V_۲], \cdots, G[V_w]$ مولفه‌های G هستند. اگر G دارای دقیقا یک مولفه باشد G همبند است؛ در غیر این صورت G ناهمبند است.

شکل‌های زیرگراف‌های همبند و ناهمبند را نشان می‌دهد.



شکل ۶.۱: گراف همبند



شکل ۷.۱: گراف ناهمبند

تعریف ۳۴.۲.۱. گراف همبندی که فاقد دور باشد، درخت نامیده می‌شود.

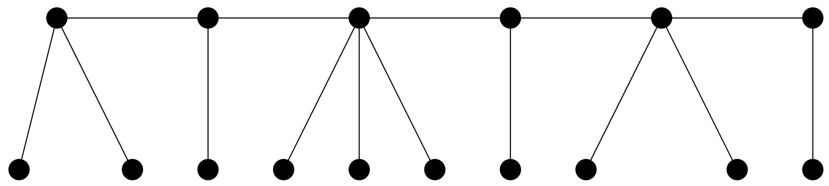
تعریف ۳۵.۲.۱. در یک درخت، به هر راس از درجه‌ی یک برگ می گوییم. راسی که در همسایگی یک برگ باشد، **راس پشتیبان** [۴] نام دارد. به هر راس پشتیبان با حداقل دو برگ در همسایگی‌اش، **راس پشتیبان قوی** [۵] می گویند.

[۴] Support vertex

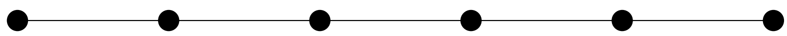
[۵] Strong support vertex

تعریف ۳۶.۲.۱. یک **هزار پا**[۶]، یک درخت است که از حذف همه‌ی برگ‌های آن یک **رشته**[۷] حاصل می‌شود. کد زنجیر یک هزارپا یک $k-$ تایی مرتب $(l_۱, \cdots, l_k)$ است که l_i تعداد برگ‌هایی است که مجاور v_i است.

شکل زیر یک هزارپا است که رشته‌ی آن نیز نشان داده شده است و کدزنجیر آن عبارت است از $(۲, ۱, ۳, ۱, ۲, ۱)$



شکل ۸.۱: هزارپا



شکل ۹.۱: رشته

تعریف ۳۷.۲.۱. منظور از یک k–رنگ آمیزی راسی گراف G تخصیص k رنگ به راس‌های G است. یک رنگ آمیزی سره است اگر هیچ دو راس مجاور متمایز دارای یک رنگ نباشد.

تعریف ۳۸.۲.۱. منظور از یک k–رنگ آمیزی یالی از گراف بدون طوقه‌ی G تخصیص k رنگ، $۱, ۲, \cdots, k$ به یال‌های G است. به طور مشابه رنگ آمیزی فوق سره است اگر هیچ دو یال مجاور هم‌رنگ نباشند.

[۶] Caterpillar
[۷] Spine

۳.۱ احاطه گری

مفهوم احاطه‌گری [۸] در گراف‌ها کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر، شبکه‌های الکترونیکی و ... دارد.
از جمله کاربردهای آن می‌توان در مخابرات برای نصب دکل‌های آنتن در مناطقی از شهر و یا انتخاب بهترین مکان‌ها برای احداث بیمارستان، فروشگاه یا مراکز آتش نشانی و ... اشاره کرد.
این مفهوم نخستین بار در سال ۱۸۶۲ توسط دوجکنیش[۹]، روی صفحه‌ی شطرنج مورد استفاده قرار گرفت اما بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه‌ی گراف‌ها مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت و تاکنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است.
در سال ۱۸۶۲ بال [۱۰] [۲۰]مساله‌ی کمترین تعداد مهره‌های وزیر مورد نیاز، جهت قرار گرفتن روی صفحه‌ی شطرنج را به قسمی که هر خانه‌ای مورد حمله‌ی یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری مورد حمله‌ی وزیر دیگری نباشد را مطرح کرد. این مساله به مساله‌ی ۵-وزیر معروف شد.

مفهوم احاطه گری می تواند ابزار مفیدی برای اتخاذ تصمیم گیری و تعیین برخی از شبکه‌های سازمانی باشد.
مثلا فرض کنید یک شرکت می‌خواهد برای ایجاد فروشگاه‌های مواد غذایی در یک منطقه، با در نظر گرفتن تراکم جمعیت در آن منطقه اقداماتی انجام دهد. با این حال، این شرکت در نظر دارد که تعداد فروشگاه‌های مورد نظر را به حداقل برساند و در عین حال دسترسی همه‌ی مردم منطقه به فروشگاه امکانپذیر باشد، به عبارت دیگر با ایجاد حداقل فروشگاه به هدف مورد نظر دست یابیم.
برای این منظور نقاط مختلف منطقه‌ی مورد نظر را به عنوان رئوس گراف در نظر می‌گیریم و با ایجاد هر فروشگاه، تمامی نقاطی که به فروشگاه دسترسی دارند را با خطوطی به آن متصل می‌کنیم به این ترتیب یال‌های گراف مورد نظر را رسم کرده و گرافی طراحی می‌کنیم.
حال به دنبال کمترین تعداد نقاطی هستیم که تمام نقاط بیرونی را پوشش دهد.
امروزه نظریه‌ی احاطه گری در گراف‌ها از حیطه‌های جذاب پژوهشی می‌باشد و بسیاری

[۸] Dominating
[۹] De Jacnish
[۱۰] w. w. Rouse Ball

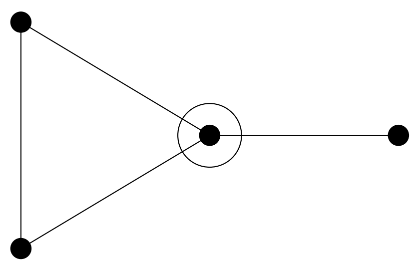
از پژوهشگران در این خصوص مشغول مطالعه وتحقیق هستند. در سال ۱۹۹۸ دو کتاب محتوای پیشرفت‌های این نظریه توسط سه نفر از رهبران این نظریه به چاپ رسیده، که پنجره‌ای جدید روی ریاضیات نوین گشوده است ومسایل باز متنوعی در این زمینه موجودند. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به مراجع [۷] و [۱۰] مراجعه کرد.
یکی از این مسایل دسته بندی گراف‌ها بر اساس تاثیر حذف یال یا راس ازگراف می‌باشد، که تاکنون منجر به برخی دسته بندی‌ها شده ها شده است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف، با مجموعه رئوس V که $|V|=n$ و مجموعه یال‌های E باشد.

مجموعه‌ی $S\subseteq V$ را یک مجموعه‌ی احاطه گر می‌نامیم، هر گاه برای هر راس $v\in V$، $|N(v)\cap S|\geq ۱$.

می‌نیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه گر درگراف G را عدد احاطه گری آن مجموعه نامیده و با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود. به یک مجموعه‌ی احاطه گر G با اندازه‌ی $\gamma(G)$ یک $\gamma(G)-$مجموعه گفته می‌شود.

شکل زیر کوچکترین مجموعه‌ی احاطه گر گراف مورد نظر را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰.۱: $\gamma(G)=۱$

قضیه ۲.۳.۱. [۱۲]اگر P_n مسیری با n راس و C_n دوری با n راس باشد، آنگاه

$$\gamma(P_n)=\gamma(C_n)=\lceil\frac{n}{۳}\rceil.$$

قضیه ۳.۳.۱. برای هر یال e در گراف G، $\gamma(G)\leq\gamma(G\setminus e)$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma(G\setminus e)$ − مجموعه و $e=xy$ یال دلخواهی باشد. اگر $\{x,y\}\subseteq S$ باشد، آنگاه S یک مجموعه‌ی احاطه گر برای G می‌باشد. لذا $\gamma(G)\leq\gamma(G\setminus e)$.

اگر S $\{x,y\} \not\subseteq S$ آن گاه به وضوح S یک مجموعه‌ی احاطه گر برای گراف G می‌باشد. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G \setminus e)$.
و در نهایت اگر $x \in S$ و $y \notin S$، آن‌گاه با اضافه کردن یال $e = xy$، مجموعه‌ی S یک مجموعه‌ی احاطه گر برای G می‌باشد. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G \setminus e)$. □

۴.۱ احاطه گری کلی

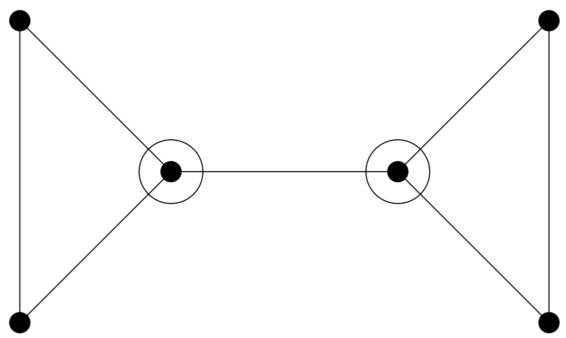
در بخش قبل مفهوم احاطه گری در گراف‌ها را مطرح کردیم. اینک این مفهوم را به‌طور گسترده‌تر برای تمام گراف G تعمیم می‌دهیم، و آن را احاطه گر کلی [۱۱] می‌نامیم.
در سال ۱۹۸۰ به دنبال حل مساله ۵-وزیر، هدتنیمی[۱۲]، داوز[۱۳]، و کوکین [۱۴] مساله‌ی احاطه گری کلی را در مقاله‌ای تحت عنوان (احاطه گری کلی در گراف) [۲] مطرح کردند و امروزه به طور گسترده در نظریه‌ی گراف‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.
برای اطلاعات بیشتر در مورد تحقیقات جدیدی که در مورد احاطه گری کلی در گراف‌ها انجام شده است، می‌توان به [۱۴] مراجعه کرد.
از جمله کاربردهای آن می توان برای ساخت مناطقی از شهر، برای ایجاد فروشگاه اشاره کرد، به طوری که علاوه بر امکان دسترسی همه‌ی مردم شهر به فروشگاه، فروشگاه‌ها، خود نیز به یکدیگر دسترسی داشته باشند.

تعریف ۱.۴.۱. یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی در گراف G، مجموعه‌ای مانند S از رئوس G است، به طوری که هر راس گراف G با راسی از S مجاور باشد. به عبارت دیگر $S \subseteq V$ را یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی می‌گوییم، هر گاه برای هر راس $v \in G$، $|N(v) \cap S| \geq ۱$ باشد.

تعریف ۲.۴.۱. کوچکترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی در گراف G را عدد احاطه گری کلی G نامیده و آن را با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم. به یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی G با اندازه‌ی $\gamma_t(G)$، یک $\gamma_t(G)$-مجموعه گفته می‌شود.

[۱۱] Total Dominating
[۱۲] Hedetniemi
[۱۳] Dawes
[۱۴] cockayne

شکل زیر کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی را در گراف زیر نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱۱: $\gamma_t(G) = ۲$

قضیه ۱.۴.۳. [۱۲] اگر P_n مسیری n راسی و C_n دوری n راسی باشد، آن‌گاه
$$\gamma_t(P_n) = \gamma_t(C_n) = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$$
.

فصل ۲

۱.۲ مقدمه

در این فصل به بررسی تاثیری که بالابر یالی روی مجموعه‌ی احاطه گری یک گراف دارد، می‌پردازیم. عمل بالابر یالی که همچنین شکاف دهنده‌ی یالی نامیده می‌شود، نخستین بار توسط لوواز[۱] در [۱۸] و [۱۹] در مطالعه‌ی یال‌های همبند در گراف‌ها مطرح شد. هدف از مطالعه‌ی این فصل توجه به دو موضوع بالابر یالی و مجموعه‌ی احاطه گری است.
تحقیقات وسیعی در ارتباط با عوامل تاثیرگذار روی عدد احاطه گری در گراف‌ها انجام شده است. به خصوص گراف‌هایی که عدد احاطه گری آن‌ها پس از افزودن یا حذف یک یال یا راس، افزایش یا کاهش می‌یابد. بسیاری از مثال‌ها را می توان در [۱، ۴، ۵، ۲۱]، همچنین نتایج متعددی را می‌توان در [۳] و [۱۶] مشاهده کرد.
چون بالابریالی ترکیبی از حذف و افزودن یال است، در حقیقت از حذف دو یال و افزودن یک یال جدید حاصل می‌شود، لذا طبیعی به نظر می‌رسد که در مورد تاثیر آن روی تغییر در عدد احاطه گری بررسی‌هایی صورت گیرد.
در بخش دوم نشان می‌دهیم که بالابر یالی می‌تواند تاثیری در عدد احاطه گری نداشته باشد، یا یک واحد آن را تغییر دهد (افزایش یا کاهش دهد). در این خصوص گراف‌ها بر اساس تاثیر بالابر یالی روی عدد احاطه گری دسته بندی می‌شوند.
هدف اصلی ما در بخش سوم آن است که نشان دهیم بالابرهای یالی در گراف G تاثیر یکسانی روی عدد احاطه گری دارند. به عبارت دیگر در یک گراف G، دو بالابر یالی وجود ندارد به طوری که یکی عدد احاطه گری را کاهش و دیگری آن را افزایش دهد.

[۱] Lovasz

۲.۲ تعاریف و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف و u و v دو راس از آن باشند که به فاصله‌ی دو از یکدیگر قرار گرفته باشند و x یک همسایگی مشترک u و v باشد. منظور از یک بالابر یالی در گراف G، حذف یال‌های ux و xv و اضافه کردن یال uv می‌باشد.

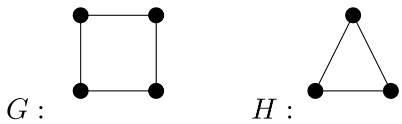
گراف حاصل از بالا بر یالی روی uxv در G را با G_x^{uv} نشان می‌دهیم. در این صورت

$$V(G_x^{uv}) = V(G)$$

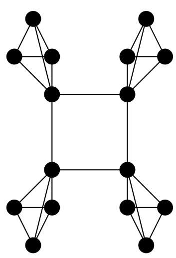
$$E(G_x^{uv}) = (E(G) \setminus \{ux, vx\}) \cup \{uv\}.$$

تعریف ۲.۲.۲. $A(G)$ را مسیرهایی از مجموعه‌ی همه‌ی رئوس القایی $P_۳$ در G تعریف می‌کنیم. به طور کلی فرض می‌کنیم uxv هر مسیر القایی دلخواه $P_۳$ در $A(G)$ با مجموعه رئوس $\{u, x, v\}$ و راس مرکزی x باشد.

تعریف ۳.۲.۲. ضرب تاجی گراف‌های G و H را با GoH نشان می‌دهیم که عبارت است از گراف حاصل از G با افزودن گراف H برای هر راس $v \in V(G)$، و افزودن یال‌هایی از v به هر راس H. مثلا فرض کنید



در این صورت GoH به صورت شکل زیر خواهد بود.



شکل ۱.۲: تاجی گراف‌های G و H

۳.۲ دسته بندی گراف‌ها

بالابر یالی می‌تواند موجب شود که عدد احاطه گری یک گراف افزایش یابد، کاهش یابد، یا بی‌تغییر بماند. ابتدا نشان می‌دهیم که بالابر یالی می‌تواند عدد احاطه گری یک گراف را حداکثر یک واحد افزایش و یک واحد کاهش دهد.

قضیه ۱.۳.۲. [۷] برای هر گراف G و هر مسیر $uxv \in A(G)$،

$$\gamma(G) - ۱ \leq \gamma(G_x^{uv}) \leq \gamma(G) + ۱$$

اثبات. کران پایین: فرض کنید S^* یک $\gamma(G_x^{uv})$ مجموعه باشد. اگر S^* یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G باشد، در این صورت $\gamma(G) \leq \gamma(G_x^{uv})$. در نتیجه $\gamma(G) - ۱ \leq \gamma(G_x^{uv})$ و سمت چپ به دست می‌آید. در غیر این صورت $S^* \cup \{x\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G است و $\gamma(G) \leq |S^*| + ۱ = \gamma(G_x^{uv}) + ۱$. لذا $\gamma(G) - ۱ \leq \gamma(G_x^{uv})$ و سمت چپ اثبات می‌شود.

کران بالا: فرض کنید S یک $\gamma(G)$ مجموعه باشد و $S \cap \{x, u, v\} \neq \emptyset$ باشد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم

$$x \in S \Longrightarrow S \cap \{x, u, v\} = \{x\} \tag{۱.۲}$$

$$\Longrightarrow S' = S \cup \{u\} \tag{۲.۲}$$

$$v \in S \Longrightarrow S \cap \{x, u, v\} = \{v\} \tag{۳.۲}$$

$$\Longrightarrow S' = S \cup \{x\} \tag{۴.۲}$$

$$u \in S \Longrightarrow S \cap \{x, u, v\} = \{u\} \tag{۵.۲}$$

$$\Longrightarrow S' = S \cup \{x\} \tag{۶.۲}$$

در همه‌ی موارد فوق S' یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G_x^{uv} است و

$$\gamma(G_x^{uv}) \leq |S'| = |S| + ۱ = \gamma(G) + ۱.$$

در نتیجه $\gamma(G_x^{uv}) \leq \gamma(G) + ۱$. □

$A(G)$ را بر اساس تاثیری که بالابر یالی روی مجموعه‌ی احاطه‌گری در هر مسیر در $A(G)$ دارد دسته بندی می‌کنیم.

تعریف ۲.۳.۲. افراز ضعیف یک مجموعه به تقسیم‌بندی یک مجموعه گفته می‌شود، به طوری که بعضی از زیرمجموعه‌هایش ممکن است تهی باشد.

برای هر گراف G افراز ضعیف مجموعه‌ی $A(G)$ به سه دسته تقسیم می‌شود.

$$a)A^+(G) = \{uxv \in A(G) \,|\gamma(G_x^{uv}) = \gamma(G) + ۱\}.$$

$$b)A^-(G) = \{uxv \in A(G) \,|\gamma(G_x^{uv}) = \gamma(G) - ۱\}.$$

$$c)A^۰(G) = \{uxv \in A(G) \,|\gamma(G_x^{uv}) = \gamma(G)\}.$$

تعریف ۳.۳.۲. یک گراف G، γ_l^- − بحرانی است هرگاه $A(G) = A^-(G)$.
یک گراف G، γ_l^+ − بحرانی است هرگاه $A(G) = A^+(G)$.
یک گراف G، γ_l − ناپایدار است هرگاه $A^۰(G) = \emptyset, A^-(G) \neq \emptyset, A^+(G) \neq \emptyset$.
یک گراف G، γ_l − پایدار است هرگاه $A(G) = A^۰(G)$.
یک گراف G، γ_l − آمیخته است هرگاه $A^۰(G) \neq \emptyset, A^-(G) \neq \emptyset, A^+(G) \neq \emptyset$.

برای راحتی در نمادگذاری، $F_۱$ را کلاس گراف‌های γ_l^- − بحرانی، $F_۲$ را کلاس گراف‌های γ_l^+ − بحرانی، $F_۳$ را کلاس گراف‌های γ_l − پایدار و $F_۴$ را کلاس گراف‌های γ_l − آمیخته نامگذاری می‌کنیم.

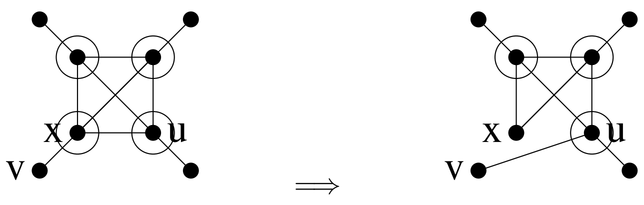
مشاهده ۴.۳.۲. اگر در یک گراف G، $A(G) = \emptyset$ باشد آن گاه در هیچ مولفه‌ای هیچ مسیر القایی وجود ندارد که بالابر یالی بر آن اعمال شود، لذا تمام مولفه‌های G کامل هستند. بنابراین $A(G) = \emptyset$ است اگر و تنها اگر هر مولفه‌ی G کامل باشد.

بنابراین فرض می‌کنیم که در گراف G، $A(G) \neq \emptyset$ و حداقل یک مسیر القایی $P_۳$ وجود دارد.
هدف اصلی ما این است که نشان دهیم مجموعه‌ی گراف‌های γ_l − ناپایدار تهی هستند. برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم چهار دسته‌ی دیگر گراف‌ها تهی نیستند. خصوصا نشان می‌دهیم که در هر دسته یک گراف همبند G موجود است به طوری که $A(G) \neq \emptyset$ و

عدد احاطه‌گری آن حداقل ۲ است.

قضیه ۲.۳.۵. [۷] برای هر i، $۱ \leq i \leq ۴$ و هر $k \geq ۳$ یک گراف G_i موجود است به طوری که $\gamma(G_i) = k$ و $A(G_i) \neq \emptyset$.

اثبات. ۱ ($i = ۱$) گراف G را به صورت گردایه‌ی $G = K_k o K_۱$، گراف حاصل از گراف کامل K_k با افزودن راس w' به هر راس w و افزودن یال ww' در نظر بگیرید. در این صورت هر راس $V(K_k)$ یک راس پشتیبان است لذا $\gamma(G) \geq k$. از طرفی $V(K_k)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G است و داریم $\gamma(G) \leq k$. بنابراین $\gamma(G) = k$. حال مسیر uxv در گراف G را در نظر می‌گیریم، در این صورت با اعمال بالابر یالی روی مسیر فوق خواهیم داشت $\gamma(G_x^{uv}) = \gamma(G) - ۱$. لذا G یک گراف γ_l^- - بحرانی است. در نتیجه $G \in F_۱$. مثلا برای $k = ۴$ شکل زیر را خواهیم داشت.



$\gamma(G) = ۴$

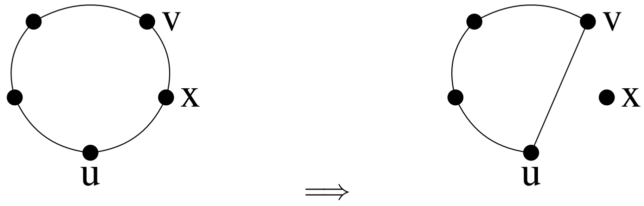
شکل ۲.۲: $\gamma(G_x^{uv}) = ۳$

۲ ($i = ۲$) فرض کنید که دور C_n را داریم. یک مسیر در دور C_n در نظر می گیریم و با اعمال بالابر یالی در مسیر فوق، شکل حاصل $C_{n-۱} \cup K_۱$ خواهد بود. طبق قضیه‌ی ۱.۳.۲ اگر $n \overset{۳}{\equiv} ۰, ۲$ باشد، آن گاه بالابر یالی عدد احاطه‌گری را افزایش می‌دهد. مثلا دور $G := C_۵$ را در شکل ۱.۹ نظر می‌گیریم. $n = ۵$ و $n \overset{۳}{\equiv} ۲$. حال با اعمال بالابر یالی در دور $G := C_۵$، $G_x^{uv} = C_۴ \cup K_۱$ را خواهیم داشت. از طرفی طبق قضیه‌ی ۱.۳.۲ خواهیم داشت $\gamma(G) = \gamma(C_۵) = \lceil \frac{۵}{۳} \rceil = ۲$.

همچنین

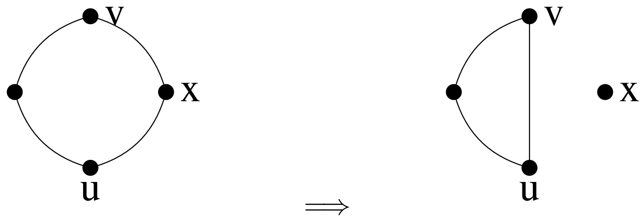
$$\gamma(G_x^{uv}) = \gamma(C_۴) \cup \gamma(K_۱) = \lceil \frac{۴}{۳} \rceil + ۱ = ۲ + ۱ = ۳.$$

لذا $\gamma(G_x^{uv}) > \gamma(G)$.



شکل ۳.۲: $\gamma(G^{uv}_x) = 4$ $\qquad \gamma(G) = 2$

۳ = i) برای ۲ $\geq k$، قرار می دهیم $G = C_{3k-2}$. طبق قضیه‌ی ۲.۳.۱، اگر در دور C_n، ۱ $n \overset{3}{\equiv}$ باشد، آن گاه بالابر یالی تاثیری در عدد احاطه‌گری ندارد. مثلا دور $G := C_4$ را در شکل ۴.۲ نظر می‌گیریم. $n = 4$ و $n \overset{3}{\equiv} 1$. حال با اعمال بالابر یالی در دور فوق $G^{uv}_x = C_3 \cup K_1$ را خواهیم داشت. لذا $\gamma(G^{uv}_x) = \gamma(G)$ و $G \in F_3$.



شکل ۴.۲: $\gamma(G^{uv}_x) = 2$ $\qquad \gamma(G) = 2$

از طرفی طبق قضیه‌ی ۲.۳.۱،

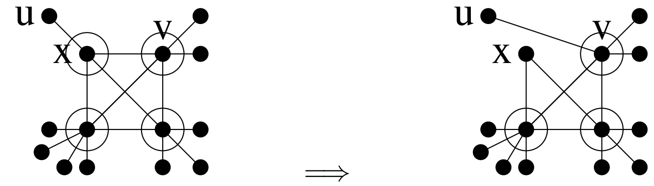
$$\gamma(G) = \gamma(C_4) = \lceil \frac{4}{3} \rceil = 2.$$

$$\gamma(G^{uv}_x) = \gamma(C_3) + \gamma(K_1) = \lceil \frac{3}{3} \rceil + 1 = 1 + 1 = 2.$$

$i = 4$) برای اثبات وجود گراف در F_4، فرض می‌کنیم که گراف G، گراف کامل K_k شامل رئوس $\{v_1, \cdots v_k\}$ باشد. برای هر v_i، i برگ را مجاور آن قرار می دهیم. در این صورت هر مسیری که در $A(G)$ در نظر بگیریم مرکز v_i را خواهد داشت. هر راس $V(K_k)$ یک راس پشتیبان است. لذا $\gamma(G) \geq k$. از طرفی $V(K_k)$ یک مجموعه‌ی احاطه گر برای G است. لذا $\gamma(G) \leq k$. بنابراین $\gamma(G) = k$.

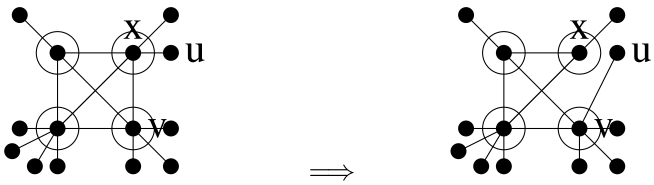
با فرض اینکه $uxv \in A(G)$، برای گراف کامل K_4 حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول) اگر $i = 1$ و $X = v_i$ باشد. در این صورت شکل زیر را خواهیم داشت.



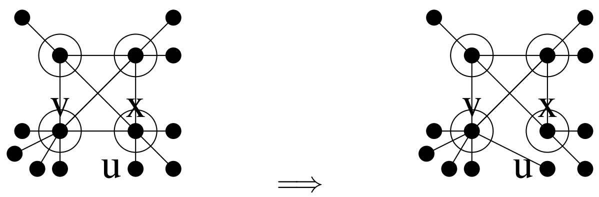
شکل ۵.۲: $\gamma(G_x^{uv}) =$ ۳ $\gamma(G) =$ ۴

حالت دوم) اگر $i =$ ۲ و $X = v_i$ باشد. در این صورت شکل زیر را خواهیم داشت.



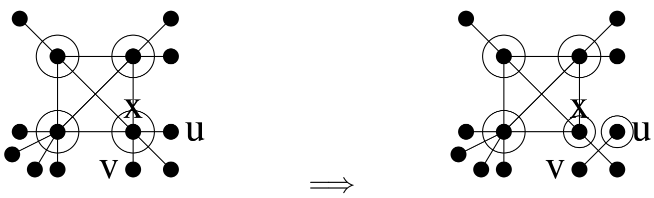
شکل ۶.۲: $\gamma(G_x^{uv}) =$ ۴ $\gamma(G) =$ ۴

نمونه‌ای دیگر از حالت دوم) اگر $i \geq$ ۳ و یکی از رئوس u و v در $V(K_k)$ باشند.



شکل ۷.۲: $\gamma(G_x^{uv}) =$ ۴ $\gamma(G) =$ ۴

حالت سوم) اگر $i \geq$ ۳ و u و v هر دو برگ باشند. در این صورت شکل زیر را خواهیم داشت.



$\gamma(G_x^{uv}) =$ ۵ $\gamma(G) =$ ۴

بنابراین $A^{+}(G) \neq \emptyset$، $A^{-}(G) \neq \emptyset$ و $A^{\circ}(G) \neq \emptyset$. در نتیجه $G \in F_{۴}$ است. $\square$

۴.۲ هدف اصلی

در این قسمت دو لم را بیان می‌کنیم که مشمول خاصیت‌هایی از مسیرهای القایی متعلق به $A^{-}(G)$ و $A+(G)$ است.

لم ۱.۴.۲. فرض کنید $uxv \in A(G)$ باشد. در این صورت $uxv \in A^{-}(G)$ است اگر وتنها اگر یک $\gamma(G)$مجموعه‌ی S، موجود باشد، به طوری که بدون کاستن از کلیت خاصیت‌های زیر موجود باشند

$$۱)\ x,u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x,S) = \{v\}.$$

یا

$$۲)\ x,v \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x,S) = \{u\}.$$

اثبات. فرض کنید $uxv \in A^{-}(G)$، S یک $\gamma(G)$مجموعه و S^{*} یک $\gamma(G_{x}^{uv})$−مجموعه باشد. چون $uxv \in A^{-}(G)$ است پس $\gamma(G_{x}^{uv}) = \gamma(G) - ۱$.

اگر $S^{*} \cap \{x,u,v\} = \emptyset$ باشد، در این صورت S^{*} یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G است. لذا $\gamma(G) \leq |S^{*}| = \gamma(G) - ۱$ که تناقض است. بنابراین $S^{*} \cap \{x,u,v\} \neq \emptyset$.

حال اگر $x \in S^{*}$ یا $\{u,v\} \subseteq S^{*}$ باشد، در این صورت S^{*} یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G محسوب می‌شود و مانند قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین $x \notin S^{*}$ و دقیقا یکی از مولفه‌های u و v متعلق به S^{*} است.

فرض کنید $u \in S^{*}$ باشد. حال اگر v یک همسایه در S^{*} متفاوت از u داشته باشد، در این صورت S^{*} یک مجموعه‌ی احاطه گر برای G محسوب می‌شود و مانند قبل به تناقض می‌رسیم. لذا $v \in epn(u,S^{*})$.

چون $x \notin S^{*}$ و x توسط رئوس دیگری به غیر از u و v احاطه می شود، بنابراین $S = S^{*} \cup \{x\}$ یک $\gamma(G)$−مجموعه است به طوری که

$$x,u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x,S) = \{v\}.$$

۲) به طور مشابه اثبات می شود.

برعکس) بدون کاستن از کلیت، فرض کنید یک $\gamma(G)$–مجموعه‌ی S موجود باشد به طوری که

$$x, u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{v\}.$$

در این صورت $S \setminus \{x\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر برای G_x^{uv} است. لذا

$$\gamma(G_x^{uv}) \leq |S| - ۱ \leq \gamma(G) - ۱.$$

بنابراین $uxv \in A^{-}(G)$. □

لم ۲.۴.۲. فرض کنید $uxv \in A(G)$ است. اگر $uxv \in A^{+}(G)$ باشد، آن گاه برای هر $\gamma(G)$–مجموعه‌ی S یکی از حالت‌های زیر را داریم.

الف) $x \in S \quad , S \cap \{u, v\} = \emptyset \quad , epn(x, S) \cap \{u, v\} \neq \emptyset.$

ب) $x \notin S \quad , S \cap \{u, v\} \neq \emptyset \quad , N(x) \cap (S \setminus \{u, v\}) = \emptyset.$

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma(G)$–مجموعه و $uxv \in A^{+}(G)$ باشد. لذا $\gamma(G_x^{uv}) = \gamma(G) + ۱$.
اگر $x \in S$ و حداقل یکی از رئوس u و v متعلق به S باشند، یا هیچ یک از رئوس u، x و v متعلق به S نباشند، در این صورت S یک مجموعه‌ی احاطه گر برای G_x^{uv} نیز می‌باشد. و لذا $\gamma(G_x^{uv}) < |S| = \gamma(G)$ که با فرض $uxv \in A^{+}(G)$ در تناقض است.
بنابراین اگر $x \in S$ باشد آن گاه $S \cap \{u, v\} = \emptyset$ و اگر $x \notin S$ آن گاه $S \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ است.
حال با فرض این که $x \in S$ و $S \cap \{u, v\} = \emptyset$. نشان می‌دهیم $epn(x, S) \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ است.

برهان خلف) فرض کنید $epn(x, S) \cap \{u, v\} = \emptyset$ باشد. در این صورت u و v یک همسایگی اختصاصی خارجی برای x نیست. یعنی u و v با راس دیگری در S مانند w مجاور است. لذا $S \setminus \{x\}$ نیز u و v را احاطه می‌کند. بنابراین S یک مجموعه‌ی احاطه گر برای G_x^{uv} نیز محسوب می‌شود. لذا $\gamma(G_x^{uv}) \leq |S| = \gamma(G)$ که با فرض $uxv \in A^{+}(G)$ در تناقض است.
حال نشان می‌دهیم اگر $x \notin S$ و $S \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ باشد، آن گاه $N(x) \cap (S \setminus \{u, v\}) = \emptyset$ است.

برهان خلف) فرض کنید $N(x) \cap (S \setminus \{u, v\}) \neq \emptyset$ باشد. در این صورت x به غیر از u و v با راس دیگری در S مانند w مجاور است. در نتیجه $S \setminus \{u, v\}$ نیز x را احاطه می‌کند.

بنابراین S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G_x^{uv} می‌باشد. لذا $\gamma(G_x^{uv}) \leq |S| = \gamma(G)$ که با فرض $uxv \in A^+(G)$ در تناقض است.

□

قضیه ۳.۴.۲. [۷] هیچ گراف همبند γ_t - ناپایدار وجود ندارد.

اثبات. برهان خلف) فرض کنید G یک گراف همبند γ_t ناپایدار باشد. لذا $A^+(G) \neq \emptyset$، $A^-(G) \neq \emptyset$ و $A^\circ(G) = \emptyset$ است. فرض کنید $P \in A^-(G)$ و $Q \in A^+(G)$ باشد.
برای ادامه‌ی اثبات ابتدا دو ادعا را بیان واثبات می‌کنیم.

ادعا ۴.۴.۲. P و Q دو راس مشترک ندارند.

اثبات. برهان خلف) فرض کنید P و Q دو مسیر با دو راس مشترک باشند. دو حالت در نظر می‌گیریم.
حالت اول) ابتدا فرض کنید دو مسیر P و Q در یکی از رئوس بیرونی و راس مرکزی مشترکند.

$$P = uxv \in A^-(G)$$

$$Q = uxw \in A^+(G).$$

چون $uxv \in A^-(G)$ است با توجه به لم ۱.۴.۲، یک $\gamma(G)$–مجموعه‌ی S موجود است به طوری که $x, u \in S$ یا $x, v \in S$ باشد.
ابتدا فرض کنید

$$x, u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{v\}.$$

از طرفی چون $uxw \in A^+(G)$ است. پس یکی از خاصیتهای لم ۲.۴.۲ برای uxw و S برقرار است و چون $x \in S$ است پس قسمت (الف) از لم ۲.۴.۲ برقرار است. اما طبق قسمت (الف) از لم ۲.۴.۲، $S \cap \{u, v\} = \emptyset$. از طرفی $x, u \in S$ که تناقض است.
لذا

$$x, v \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{u\}.$$

در این صورت $(S \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G_x^{uw} با اندازه‌ی $\gamma(G)$ است. لذا

$$\gamma(G_x^{uv}) \leq |(S \setminus \{x\}) \cup \{u\}| = (|S| - ۱) + ۱ = |S| = \gamma(G)$$

که تناقض ایجاد می‌شود زیرا $uxw \in A^+(G)$ و $\gamma(G_x^{uv}) \geq \gamma(G)$. بنابراین حالت اول اتفاق نمی‌افتد.

حالت دوم) P و Q رئوس مشترک بیرونی دارند.

$$P = uxv \in A^-(G)$$

$$Q = uyv \in A^+(G).$$

چون $P = uxv \in A^-(G)$ است، با توجه به لم ۱.۴.۲، $\gamma(G)$–مجموعه‌ی S موجود است به طوری که $x, u \in S$ یا $x, v \in S$ باشد.

ابتدا فرض کنید

$$x, u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{v\}.$$

قرار می‌دهیم $S^* = (S \setminus \{x\}) \cup \{y\}$. در این صورت S^* یک $\gamma(G)$–مجموعه است به عبارت دیگر $|S^*| = \gamma(G)$.

چون $uyv \in A^+(G)$، پس یکی از خاصیت‌های لم ۲.۴.۲ برای S^* و uyv برقرار است. اما چون $u \in S^*$ است وضعیت (الف) اتفاق نمی‌افتد. از طرفی چون $y \in S^*$ است، پس وضعیت (ب) نیز نادرست است که تناقض ایجاد می‌شود.

برای حالتی که $x, v \in S$ باشد، نیز به طور مشابه به تناقض می‌رسیم.

بنابراین فرض می‌کنیم که G شامل یک مسیر القایی $P_۴ = (u, x, v, w)$ است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید

$$uxv \in A^-(G)$$

$$xvw \in A^+(G).$$

چون $uxv \in A^-(G)$ است، با توجه به لم ۱.۴.۲، یک $\gamma(G)$–مجموعه‌ی S موجود است به طوری که یکی از خواص زیر برقرار باشد.

$$۱)\ x, u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{v\}.$$

$$۲)\ x, v \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{u\}.$$

فرض کنید (۱) برقرار باشد. چون $epn(x, S) = \{v\}$ و $w \notin S$. لذا w یک همسایگی در $S \setminus \{x\}$ دارد. اما $(S \setminus \{x\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر برای G_v^{xw} با اندازه‌ی $\gamma(G)$ است. لذا $\gamma(G_v^{xw}) < \gamma(G)$ که تناقض ایجاد می‌شود زیرا $xvw \in A^+(G)$ و $\gamma(G_v^{xw}) \geq \gamma(G)$. بنابراین حالت (۱) اتفاق نمی‌افتد.

فرض کنید (۲) برقرار باشد. چون $xvw \in A^+(G)$، پس یکی از خاصیت‌های لم ۲.۴.۲ برای S و xvw برقرار است. اما چون $x,v \in S$ است پس با هر دو خاصیت لم ۲.۴.۲ در تناقض است. بنابراین حالت (۲) نیز اتفاق نمی‌افتد و این اثبات ادعای ۴.۴.۲ را کامل می‌کند. □

ادعا ۵.۴.۲. P و Q مسیرهایی از رئوس مجزایند.

اثبات. با توجه به ادعای ۴.۴.۲، P و Q حداکثر در یک راس مشترکند. چهار حالت در نظر می گیریم.

$$P = uxv \in A^-(G)$$

$$Q = abc \in A^+(G).$$

حالت اول) ابتدا فرض کنید P و Q یک راس مشترک بیرونی دارند. $(v = a)$
چون $uxv \in A^-(G)$ است، با توجه به لم ۱.۴.۲، یک $\gamma(G)$−مجموعه‌ی S موجود است به طوری که یکی از خواص زیر برقرار باشد.

$$۱)\ x,u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x,S) = \{v\}.$$

$$۲)\ x,v \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x,S) = \{u\}.$$

فرض کنید ۱ برقرار باشد. طبق ۱ داریم $epn(x,S) = \{v\}$ لذا $b \notin S$ چون در غیر این صورت $v \notin epn(x,S)$.
چون $vbc \in A^+(G)$ است. پس یکی از خاصیت‌های لم ۲.۴.۲ برای vbc و S برقرار است. اما چون $a,b \notin S$ خاصیت (ب) لم ۲.۴.۲ ایجاب می‌کند که $c \in S$ باشد. اما $(S \setminus \{x\}) \cup \{b\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای G_b^{vc} است. لذا $\gamma(G_b^{vc}) < \gamma(G)$ که تناقض ایجاد می‌شود زیرا $vbc \in A^+(G)$ و $\gamma(G_b^{vc}) \geq \gamma(G)$. بنابراین حالت (۱) اتفاق نمی‌افتد.
لذا فرض کنید ۲ برقرار است. طبق ۲، $x,v \in S$. از طرفی $vbc \in A^+(G)$، و چون $v \in S$ است، لذا طبق خاصیت (ب) لم ۲.۴.۲ $b \notin S$ و $N(b) \cap (S \setminus \{a,c\}) = \emptyset$.
بنابراین $xb \notin E(G)$ و $xvb \in A(G)$. اما xvb با uxv دو راس مشترک دارد، و با توجه به ادعای ۴.۴.۲، $xvb \in A^-(G)$ و چون xvb و vbc دو راس مشترک دارند، پس $abc \in A^-(G)$. که تناقض است. لذا P و Q فاقد راس مشترک بیرونی هستند.

حالت دوم) فرض کنید P و Q یک راس مشترک مرکزی دارند. $(x = b)$
چون $uxv \in A^-(G)$ است، با توجه به لم ۱.۴.۲، یک $\gamma(G)$−مجموعه‌ی S موجود است به طوری که یکی از خواص زیر برقرار باشد.

$$۱)\ x, u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{v\}.$$

$$۲)\ x, v \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{u\}.$$

ابتدا فرض کنید ۱ برقرار باشد. $axc \in A^+(G)$ است. پس یکی از خاصیت‌های لم ۲.۴.۲ برای axc و S برقرار است. اما چون $x \in S$، پس وضعیت (الف) لم ۲.۴.۲ برقرار است. لذا

$$x \in S, \qquad S \cap \{a, c\} = \emptyset, \qquad epn(x, S) \cap \{a, c\} \neq \emptyset.$$

از طرفی طبق ۱ داریم $epn(x, S) = \{v\}$ و $epn(x, S) \cap \{a, c\} = \emptyset$ که تناقض است.
حال فرض کنید خاصیت ۲ لم ۱.۴.۲ برقرار باشد. در این صورت نیز مشابه حالت ۱ به تناقض می‌رسیم. لذا P و Q فاقد راس مشترک مرکزی هستند.
حالت سوم) فرض کنید P و Q به ترتیب در یک راس مرکزی و بیرونی مشترکند. $(x = a)$
چون $uxv \in A^-(G)$ است، با توجه به لم ۱.۴.۲، یک $\gamma(G)$−مجموعه‌ی S موجود است به طوری که یکی از خواص زیر برقرار باشد.

$$۱)\ x, u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{v\}.$$

$$۲)\ x, v \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{u\}.$$

ابتدا فرض کنید ۱ برقرار باشد. $xbc \in A^+(G)$ است پس یکی از خاصیت‌های لم ۲.۴.۲ برای xbc و S برقرار است. اما چون $x \in S$، پس وضعیت (ب) لم ۲.۴.۲ برقرار است. لذا

$$b \notin S, \qquad S \cap \{x, c\} \neq \emptyset, \qquad N(b) \cap (S \setminus \{x, c\}) = \emptyset.$$

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم
$c \notin S$
$c \in S$.
ابتدا فرض کنید $c \notin S$. طبق خاصیت (ب) لم ۲.۴.۲ داریم $N(b) \cap (S \setminus \{x, c\}) = \emptyset$. لذا $b \in epn(x, S)$ که تناقض ایجاد می‌کند زیرا طبق خاصیت ۱ داریم $epn(x, S) = \{v\}$.
اگر $c \in S$ باشد، آن گاه داریم $N(b) \cap S = \{x, c\}$.

از طرفی طبق ۱ داریم $x, u \in S$. لذا $ub \notin E(G)$ و $uxb \in A(G)$ است. اما uxb با abc دو راس مشترک دارند. لذا طبق ادعای ۴.۴.۲ داریم $uxb \in A^-(G)$. اما uxb و xbc دو راس مشترک دارند که ایجاب می‌کند $abc \in A^-(G)$. این یک تناقض است. لذا ۱ رخ نمی‌دهد.
برای حالتی که ۲ رخ دهد نیز مانند قبل به تناقض می‌رسیم. لذا $(x \neq a)$.
حالت چهارم) فرض کنید P و Q به ترتیب در یک راس بیرونی و مرکزی مشترکند. $(u = b)$
چون $uxv \in A^-(G)$ است، با توجه به لم ۱.۴.۲، یک $\gamma(G)-$مجموعه‌ی S موجود است به طوری که یکی از خواص زیر برقرار باشد.

$$۱)\ x, u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{v\}.$$

$$۲)\ x, v \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{u\}.$$

ابتدا فرض کنید ۱ برقرار باشد. $auc \in A^+(G)$ است. پس یکی از خاصیت‌های لم ۲.۴.۲ برای auc و S برقرار است. اما چون $u \in S$، پس وضعیت اول لم فوق برقرار است.

$$u \in S, \qquad S \cap \{a, c\} = \emptyset, \qquad epn(u, S) \cap \{a, c\} \neq \emptyset.$$

و چون $\{a, c\} \subseteq epn(u, S)$ لذا $\{ax, cx\} \notin E(G)$. در نتیجه $aux \in A(G)$. از طرفی $uxv \in A^-(G)$، و چون aux و auc دو راس مشترک دارند در نتیجه طبق ادعای ۴.۴.۲ $abc \in A^-(G)$ که تناقض است. لذا ۱ رخ نمی‌دهد.
حال فرض کنید ۲ برقرار است. در این صورت $b = u \notin S$ و چون $abc \in A^+(G)$. پس خاصیت (دوم) لم ۲.۴.۲ برقرار است. لذا

$$S \cap \{a, c\} \neq \emptyset, \qquad N(u) \cap (S \setminus \{a, c\}) = \emptyset.$$

و این یعنی u حداقل با یکی از رئوس a و c در S مجاور است. از طرفی طبق خاصیت ۲ داریم $epn(x, S) = \{u\}$ که تناقض است.
لذا P و Q مسیرهایی از رئوس مجزایند و به این ترتیب ادعای ۵.۴.۲ اثبات می‌شود. □

حال به ادامه‌ی اثبات قضیه‌ی اصلی می‌پردازیم.

اثبات. دو مسیر از رئوس مجزا در نظر می‌گیریم.

$$p = uxv \in A^-(G)$$

$$Q = abc \in A^+(G).$$

به طوری که در میان تمام مسیرها در $A^-(G) \cup A^+(G)$ فاصله ی بین رئوس در دو مسیر فوق می‌نیمم باشد.
فرض کنید R کوتاه‌ترین مسیر بین هر راس در P و هر راس در Q باشد. y را اولین راس در R در نظر می‌گیریم، به طوری که با یک راس در P مجاور باشد. لذا y با هر راس در P مجاور است. به عبارت دیگر y یک راس بیرونی مسیر القایی $P_۳$ در $A^-(G)$ است که دو راس مشترک با P دارد. لذا $P_۳$ شامل y در $A^-(G)$ کوتاه‌ترین مسیر بین $A^+(G)$ و $A^-(G)$ است که با انتخاب P و Q در تناقض است.
هر راس در R مجاور هر راس در P، و به طور مشابه هر راس در R مجاور هر راس در Q است.
فرض کنید که یک راس w در P و یک راس z در Q موجود باشند به طوری که w و z مجاور نباشند. در این صورت wrz که $r \in R$ یک مسیر القایی در $P_۳$ ایجاد می کند. این مسیر القایی متعلق به $A^-(G)$ یا $A^+(G)$ است که کوتاه‌ترین مسیر بین $A^+(G)$ و $A^-(G)$ است و در هر دو مورد با انتخاب P و Q به تناقض می‌رسیم.
لذا هر راس در P مجاور هر راس در Q است. بنابراین R به طول ۱ است.
حال فرض کنید $uxv \in A^-(G)$. با توجه به لم ۱.۴.۲، یک $\gamma(G)$−مجموعه‌ی S موجود است به طوری که

$$۱)\ x, u \in S, \qquad |N(x) \cap S| \geq ۲, \qquad epn(x, S) = \{v\}.$$

اما چون $abc \in A^+(G)$ است، پس یکی از خاصیت‌های لم ۲.۴.۲ برای abc و S برقرار است. طبق خاصیت‌های لم فوق، حداقل یکی از رئوس $a, b, c \in S$ است. لذا $v \notin epn(x, S)$ که تناقض است. لذا هیچ گراف همبند γ_t−ناپایدار وجود ندارد. $\square$

فصل ۳

۱.۳ مقدمه

در این فصل به بررسی تاثیری که بالابر یالی روی مجموعه‌ی احاطه گری کلی یک گراف دارد می‌پردازیم. مطالعاتی در این زمینه در [۷] و [۸] به عمل آمده است. مطالعات انجام گرفته در [۷] حاکی از آن است که بالابر یالی می‌تواند موجب شود که عدد احاطه گری کلی یک گراف ثابت بماند، یا یک واحد افزایش یا یک واحد کاهش یابد.
بالابر یالی، در زمینه‌ی کاهش عدد احاطه گری کلی یک گراف بر اثر افزودن هر یال نخستین بار توسط واندر مروه [1] در [۲۴]، مطرح شد. این مفهوم بعدها به طور کامل‌تر در [۱۱،۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۷، ۱۸، ۲۳] مورد مطالعه وتحقیق قرار گرفت.
تحقیقاتی در زمینه‌ی کاهش عدد احاطه گری کلی یک گراف بر اثر حذف هر راس، توسط گودارد[2]، هاینز[3]، هنینگ [4]و واندر مروه در [۱۰]، انجام شده است. ویژگی این گراف‌ها در [۲۳ ،۲۴، ۲۵] بیان شده است.
نویسندگان در [۷] در مورد گراف‌هایی که عدد احاطه گری کلی آن‌ها بر اثر حذف هر یال تغییر می‌یابد و گراف‌هایی که عدد احاطه گری کلی آن بر اثر حذف هر یال بدون تغییر باقی بماند، مطالعاتی انجام داده‌اند.
در [۸] نیز در مورد گراف‌هایی که عدد احاطه گری کلی آن‌ها بر اثر افزایش هر یال بدون تغییر باقی بماند، مطالعاتی صورت گرفته است.
در این فصل در مورد تاثیر بالابر یالی روی مجموعه‌ی احاطه‌گری کلی یک گراف

[1] Van der Merwe
[2] Goddard
[3] Haynes
[4] Henning

مطالعاتی انجام می‌دهیم. در این میان، توجه خود را به گراف‌های همبندی که شامل حداقل یک مسیر القایی $P_۳$ هستند، معطوف می‌کنیم. علاوه بر این چون مجموعه‌ی احاطه گری کلی برای یک گراف با رئوس مجزا تعریف نشده، لذا به گراف‌های G که پس از تاثیر هر بالابریالی دارای رئوس مجزا نباشد، می‌پردازیم. به عبارت دیگر مرکز القایی $P_۳$ در G راس از درجه‌ی ۲ ندارد. بنابراین هر راس از درجه‌ی ۲ در G مشمول در یک مثلث است. l خانواده‌ای از چنین گراف‌هایی است.

۲.۳ تعاریف و نمادهای مقدماتی

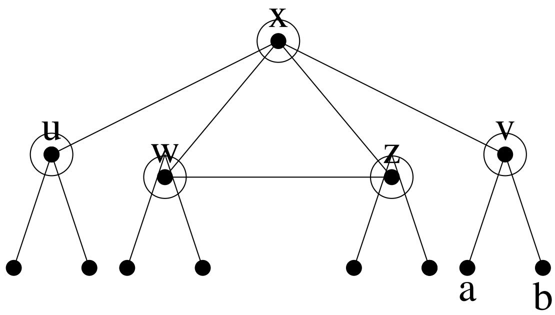
فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف، و u و v دو راس از آن باشد که به فاصله‌ی دو از یکدیگر قرار گرفته باشند و x یک همسایگی مشترک u و v باشد به طوری که $d_G(x)\geq ۳$. همانند فصل قبل منظور از یک بالابر یالی در یک گراف G، حذف یال‌های ux و xv و اضافه کردن یال uv می‌باشد. به طوری که

$$V(G_x^{uv})=V(G).$$

$$E(G_x^{uv})=(E(G)\setminus\{ux,vx\})\cup\{uv\}.$$

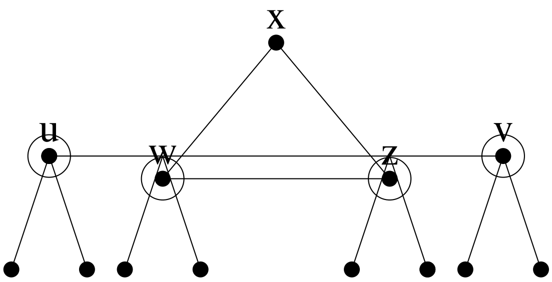
۳.۳ تاثیرات بالابر یالی روی عدد احاطه گری کلی یک گراف

یک بالابر یالی در یک گراف می‌تواند موجب شود عدد احاطه گری کلی یک گراف افزایش، کاهش، یا بی‌تغییر بماند.
برای مثال در شکل ۱.۳ مشاهده می‌کنید که $\gamma_t(G)=۵$ و مجموعه‌ی S شامل رئوس u,x,v,w,z است. با اعمال بالابر یالی روی مسیرهای مختلف تغییرات عدد احاطه گری کلی را نشان می‌دهیم.



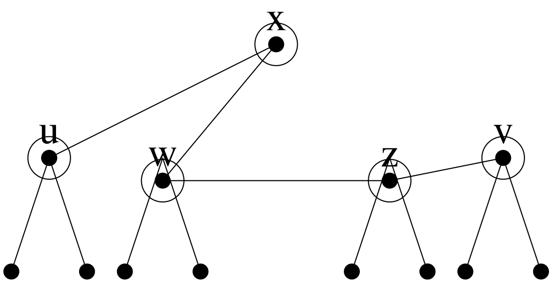
شکل ۱.۳: گراف G

ابتدا مسیر uxv در شکل ۱.۳را در نظر می‌گیریم و با اعمال بالا بر یالی روی مسیر فوق در شکل ۱.۳ شکل زیر حاصل می‌شود.



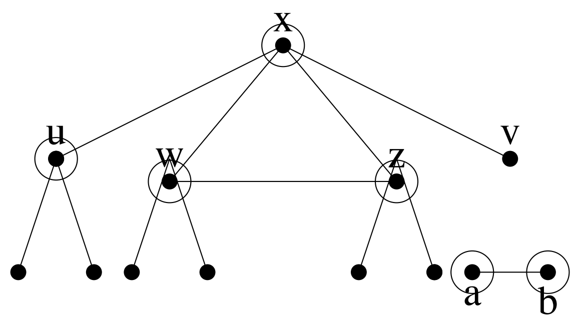
شکل ۲.۳: گراف G_x^{uv}

در این صورت $\gamma_t(G_x^{uv}) = ۴$. مجموعه‌ی S شامل رئوس u, z, w, v است.
حال با اعمال بالابر یالی روی مسیر zxv در شکل۱.۳، شکل زیر را خواهیم داشت.



گراف G_x^{vz}

در این صورت ۵ = $\gamma_t(G_x^{zv})$ و مجموعه‌ی S شامل رئوس x, u, z, w, v است.
در نهایت با اعمال بالابر یالی روی مسیر avb در شکل ۱.۳ داریم



شکل ۳.۳: شکل ۴.۳

در این صورت ۶ = $\gamma_t(G_v^{ab})$ و مجموعه‌ی S شامل رئوس x, u, w, z, a, b است.

تعریف ۱.۳.۳. $A(G)$ را مجموعه‌ی همه‌ی رئوس القایی $P_۳$ در G، به طوری که راس مرکزی درجه حداقل ۳ داشته باشد تعریف می‌کنیم.

در این فصل فرض می‌کنیم uxv هر مسیر القایی $P_۳$ در $A(G)$ باشد.

تعریف ۲.۳.۳. بر اساس تاثیری که بالابر یالی روی عدد احاطه گری کلی یک گراف روی هر مسیر در $A(G)$ دارد، تعریف مشابهی مانند فصل قبل برای افراز ضعیف مجموعه‌ی $A(G)$ ارائه می‌دهیم.

$$a)\ A^{+}(G) = \{uxv \in A(G)\ |\gamma_t(G_x^{uv}) > \gamma_t(G)\}.$$

$$b)\ A^{-}(G) = \{uxv \in A(G)\ |\gamma_t(G_x^{uv}) < \gamma_t(G)\}.$$

$$c)\ A^{\cdot}(G) = \{uxv \in A(G)\ |\gamma_t(G_x^{uv}) = \gamma_t(G)\}.$$

ابتدا نشان می‌دهیم که بالابر یالی در یک گراف G می‌تواند موجب شود که عدد احاطه گری کلی یک گراف حداکثر۱ واحد کاهش، و حداکثر ۲ واحد افزایش یابد.

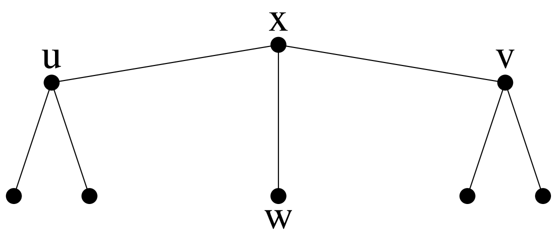
قضیه ۳.۳.۳. [۱۰] برای هر گراف G و هر مسیر $uxv \in A(G)$،

$$\gamma_t(G) - ۱ \leq \gamma_t(G_x^{uv}) \leq \gamma_t(G) + ۲.$$

اثبات. کران پایین: فرض کنید S یک $\gamma_t(G_x^{uv})$ - مجموعه باشد. اگر S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای G باشد، آن گاه $\gamma_t(G) \leq |S| = \gamma_t(G_x^{uv})$. چون $\gamma_t(G) - ۱ \leq \gamma_t(G)$ پس $\gamma_t(G) - ۱ \leq \gamma_t(G_x^{uv})$ و نامساوی سمت چپ به دست می‌آید.
در غیر این صورت اگر S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G نباشد آن گاه $S \cup \{x\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G است. لذا

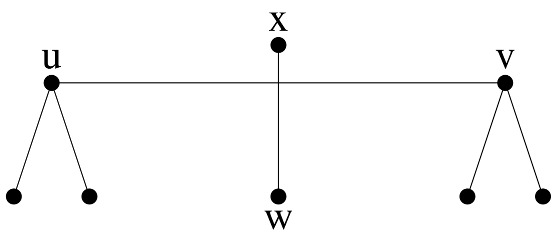
$$\gamma_t(G) \leq |S| + ۱ = \gamma_t(G_x^{uv}) + ۱.$$

و کران پایین اثبات می‌شود
کران بالا: فرض کنید S یک $\gamma_t(G)$ - مجموعه دلخواه و $w \in N(x) \setminus \{u, v\}$ باشد. چند حالت در نظر می‌گیریم .
حالت اول) اگر $x \in S$ و $\{u, v\} \subseteq S$ باشد. یعنی $S = \{x, u, v\}$ باشد. آن‌گاه می‌توان شکل ۵.۳ را در نظر گرفت. حال مسیر $uxv \in A(G)$ را در نظر گرفته و با اعمال بالابر یالی روی



شکل ۴.۳: گراف G

مسیر فوق شکل زیر را خواهیم داشت. در این صورت $S' = \{x, u, v, w\}$ یک مجموعه‌ی



شکل ۵.۳: گراف G_x^{uv}

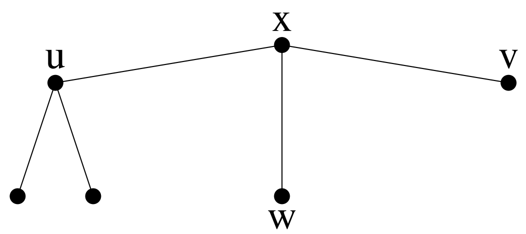
احاطه گر کلی برای G_x^{uv} است. لذا

$S' = S \cup \{w\}$ و $|S'| = |S| + ۱$.

در نتیجه

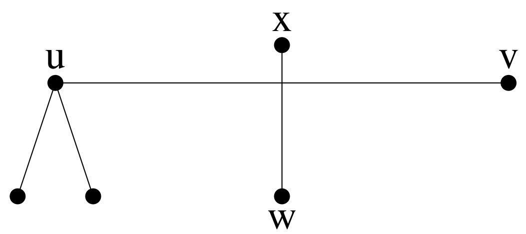
$$\gamma_t(G_x^{uv}) \leq |S| + ۱ = \gamma_t(G) + ۱.$$

حالت دوم) اگر $x \in S$ و $S \cap \{u, v\} = \{u\}$ باشد آن گاه می‌توان شکل زیر را در نظر گرفت. در این صورت $S = \{x, u\}$. حال با اعمال بالابر یالی روی مسیر uxv در شکل فوق شکل



شکل ۶.۳: گراف G

زیر را خواهیم داشت. در این صورت $S' = \{x, u, v, w\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای



شکل ۷.۳: گراف G_x^{uv}

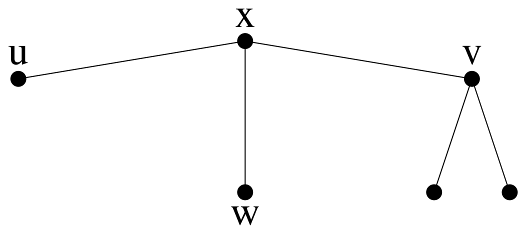
G_x^{uv} است. لذا

$S' = S \cup \{v, w\}$ و $|S'| = |S| + ۲$.

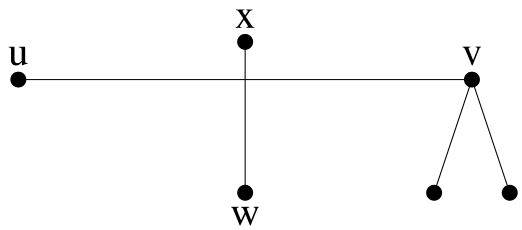
در نتیجه

$$\gamma_t(G_x^{uv}) \leq |S| + ۲ = \gamma_t(G) + ۲.$$

حالت سوم) اگر $x \in S$ و $S \cap \{u, v\} = \{v\}$ باشد. آن گاه می‌توان شکل زیر را در نظر گرفت. در این صورت $S = \{x, v\}$. حال با اعمال بالابر یالی روی مسیر uxv در شکل فوق شکل زیر را خواهیم داشت. در این صورت $S' = \{x, u, v, w\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای



شکل ۸.۳: گراف G



شکل ۹.۳: گراف G_x^{uv}

G_x^{uv} است. لذا

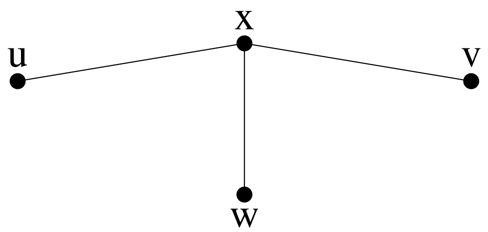
$S' = S \cup \{u, w\}$ و $|S'| = |S| + ۲$.

در نتیجه

$$\gamma_t(G_x^{uv}) \leq |S| + ۲ = \gamma_t(G) + ۲.$$

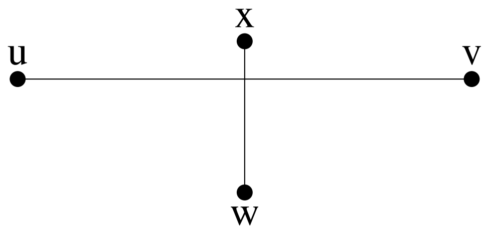
حالت چهارم)

اگر $x \in S$ و $S \cap \{u, v\} = \emptyset$ باشد. آن گاه می‌توان شکل زیر را در نظر گرفت. در این



شکل ۱۰.۳: گراف G

صورت $S=\{x,w\}$. حال با اعمال بالابر یالی روی مسیر uxv در شکل فوق شکل زیر را خواهیم داشت. در این صورت $S'=\{x,u,v,w\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G_x^{uv}



شکل ۱۱.۳: گراف G_x^{uv}

است. لذا

$S'=S\cup\{u,w\}$ و $|S'|=|S|+۲$.

در نتیجه

$$\gamma_t(G_x^{uv})\leq |S|+۲=\gamma_t(G)+۲.$$

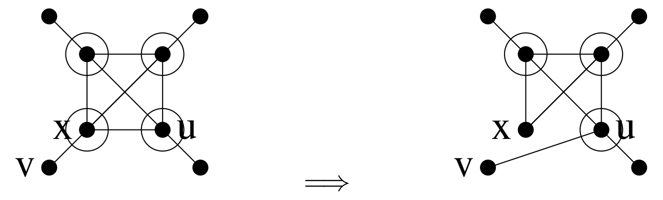
در همه‌ی موارد مشاهده می‌شود

$$\gamma_t(G_x^{uv})\leq |S|+۲=\gamma_t(G)+۲.$$

بنابراین کران بالا اثبات می‌شود. □

در زیر مثال‌هایی برای کران‌های قضیه‌ی ۳.۳.۳ عنوان می‌کنیم.

گردایه‌ی گراف $G=HoK_۱$ که $H=K_k$ و $k\geq ۳$ باشد، مثالی برای کران پایین است. زیرا در گردایه فوق هر راس $V(H)$ یک راس پشتیبان در G است لذا $\gamma_t(G)\geq |V(H)|=k$. از طرفی $V(H)$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G است لذا $\gamma_t(G)\leq k$. بنابراین $\gamma_t(G)=k$. حال فرض کنید که در گردایه‌ی فوق $uxv\in A(G)$ باشد و راس x و یکی از رئوس u یا v متعلق به H باشد. در این صورت $V(H)\backslash\{x\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G_x^{uv} است. لذا $\gamma_t(G_x^{uv})\leq k-۱$ از طرفی G_x^{uv} شامل $k-۱$ راس پشتیبان است. لذا $\gamma_t(G_x^{uv})\geq k-۱$ بنابراین $\gamma_t(G_x^{uv})=k-۱=\gamma_t(G)-۱$. مثلا برای $k=۴$ خواهیم داشت.



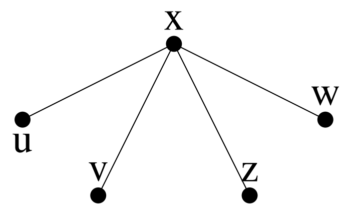
$\gamma_t(G) = ۴$ $\qquad$ $\gamma_t(G_x^{uv}) = ۳$

شکل ۱۲.۳

مثالی برای کران بالا

فرض کنید $G = K_{۱,n-۱}$ که $n \geq ۴$. در این صورت $\gamma_t(G) = ۲$ و برای هر مسیر $uxv \in A(G)$، $\gamma_t(G_x^{uv}) = ۴$.

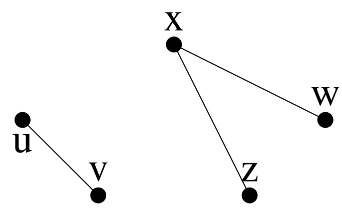
مثلا فرض کنید $n = ۵$ باشد. در این صورت $G = K_{۱,۴}$ و شکل زیر را خواهیم داشت.



شکل ۱۳.۳: گراف G

در این گراف $\gamma_t(G) = ۲$ و مجموعه‌ی احاطه گر می‌نیمم شامل راس x و به دلخواه یکی از برگ‌ها خواهد بود.

حال مسیر دلخواه $uxv \in A(G)$ را در نظر می‌گیریم و با اعمال بالابر یالی روی مسیر فوق شکل زیر را خواهیم داشت.



شکل ۱۴.۳: گراف G_x^{uv}

در شکل فوق $\gamma_t(G) = ۴$ و مجموعه‌ی احاطه گر می‌نیمم شامل رئوس x, u, v و به دلخواه یکی از رئوس w یا z خواهد بود.
قضیه‌ی زیر به توصیف $A^-(G)$ می پردازد.

قضیه ۴.۳.۳. [۱۰] فرض کنید G فاقد راس تنها و $uxv \in A(G)$ باشد. $uxv \in A^-(G)$ است اگر و تنها اگر $\gamma_t(G)$− مجموعه ی S موجود باشد به طوری که

الف) $x \in S$.

ب) $|S \cap \{u, v\}| \geq ۱$.

ج) $|N(x) \cap (S \setminus \{u, v\})| \geq ۱$.

د) $Pn(x, S) \subseteq \{u, v\}$.

ه) اگر $u \in S$ و $v \notin S$ آن گاه $Pn(x, S) \subseteq \{v\}$.

و) اگر $u \notin S$ و $v \in S$ آن گاه $Pn(x, S) \subseteq \{u\}$.

اثبات. فرض کنید $uxv \in A^-(G)$ باشد. لذا $\gamma_t(G_x^{uv}) = \gamma_t(G) - ۱$. برای راحتی در نمادگذاری قرار می‌دهیم $H := G_x^{uv}$.
لذا $\gamma_t(G) = \gamma_t(H) + ۱$. فرض کنید S^* یک $\gamma_t(H)$−مجموعه‌ی دلخواه باشد. اگر $x \in S^*$ یا $S^* \cap \{u, v\} = \emptyset$ باشد، در این صورت S^* یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G محسوب می‌شود. لذا $\gamma_t(G) \leq \gamma_t(H) = \gamma_t(G) - ۱$ که تناقض است. بنابراین $x \notin S^*$ و $S^* \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ است. لذا $|S^* \cap \{u, v\}| \geq ۱$.
فرض کنید $u \in S^*$ باشد. حال اگر v یک همسایگی در S^* متفاوت از u داشته باشد، در این صورت S^* یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G محسوب می‌شود. لذا
$\gamma_t(G) \leq |S^*| = \gamma_t(G) - ۱$ که تناقض است.
حال فرض کنید u تنها راسی در S^* است که مجاور v است. لذا $N_H(v) \cap S^* = \{u\}$.
از طرفی چون S^* یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای H است و x مجاور هیچ یک از رئوس u و v در H نیست، لذا $N(x) \cap (S^* \setminus \{u, v\}) \neq \emptyset$.
حال قرار می‌دهیم $S = S^* \cup \{x\}$. S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G است. لذا

$$\gamma_t(G) \leq |S| = |S^*| + ۱ = \gamma_t(H) + ۱ = \gamma_t(G).$$

در نتیجه $\gamma_t(G) = |S|$. بنابراین S یک $\gamma_t(G)$−مجموعه است و خاصیت‌هایی که برای S^* برقرار شد برای S نیز برقرار است. یعنی $x \in S$ و $|S \cap \{u, v\} \geq ۱|$ و $|N(x) \cap (S \setminus \{u, v\})| \geq ۱$.
لذا i و ii و iii اثبات شد.

S^* یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای H است و $x \notin S^*$ و چون u تنها راسی در S^* است که مجاور v است، لذا u و v تنها رئوسی در G هستند که توسط x احاطه می‌شوند و با هیچ راس دیگری احاطه نمی‌شوند. از این رو در گراف G داریم $pn_G(x,S) \subseteq \{u,v\}$ و بنابراین خاصیت (iv) اثبات می شود.
اگر $N_H(v) \cap S^* = \{u\}$ باشد در این صورت $u \in S$ و $v \in pn_G(x,S)$ و در نتیجه خاصیت (vi) نقض می‌شود و اگر $v \in S$ باشد، خاصیت (v) نقض می‌شود.
اگر $v \notin S$ در این صورت $u \in S$، و راس u با راسی در S^* متفاوت از x احاطه می‌شود پس با افزودن راس x به مجموعه، $u \notin pn_G(x,S)$. از طرفی چون $pn_G(x,S) \subseteq \{u,v\}$ لذا $pn_G(x,S) = \{v\}$ و خاصیت (v) اثبات می‌شود.
در نهایت، اگر $u \notin S$ در این صورت $v \in S$ است و به طور مشابه $v \notin Pn_G(x,S)$. چون $Pn_G(x,S) \subseteq \{u,v\}$، لذا $Pn_G(x,S) = \{u\}$ و به این ترتیب خاصیت (vi) اثبات می‌شود.
برعکس) برای اثبات کافی است فرض کنید $\gamma_t(G)$–مجموعه‌ی S موجود است به طوری که خاصیت (i) تا (vi) در گراف G برقرار باشد. طبق خاصیت (i) و (ii) داریم $x \in S$ و حداقل یکی از رئوس u و v متعلق به S است. فرض کنید $u \in S$ باشد. قرار می‌دهیم $S_x = S \setminus \{x\}$ و نشان می‌دهیم S_x یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای H است. با استفاده از خاصیت‌های (iii) و (iv) به این نتیجه می‌رسیم که تنها رئوسی که توسط S_x در H احاطه نمی‌شوند، رئوس u و v هستند.
اگر $v \in S$ باشد، آن‌گاه چون $u \in S$ پس راس u توسط راس v در H احاطه می‌شود.
اگر $v \notin S$، آن گاه طبق خاصیت (v)، راس u توسط راسی در H متفاوت از x و v احاطه می‌شود. در هر دو مورد u و v توسط S_x در H احاطه می‌شوند. لذا S_x یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای H است. در نتیجه

$$\gamma_t(H) \leq |S_x| = |S| - ۱ = \gamma_t(G) - ۱.$$

بنابراین $uxv \in A^-(G)$ است. □

۴.۳ دسته بندی گراف‌ها

هدف عمده‌ی این بخش کشف تاثیری است که بالابر یالی روی عدد احاطه گری کلی یک گراف دارد. یادآوری می‌کنیم که l خانواده‌ای از گراف‌های همبند G است که $A(G) \neq \emptyset$ و هر راس از درجه‌ی ۲ در G مشمول در یک مثلث است. خانواده‌ی گراف‌های l را به طریق

زیر دسته‌بندی می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۳. برای هر گراف $G \in l$ که $\gamma_t(G) = k$ باشد، تعاریف زیر را داریم.
به یک گراف G، k_l^- -بحرانی می‌گوییم، هرگاه $A(G) = A^-(G)$.
به یک گراف G، k_l -پایدار می‌گوییم، هرگاه $A(G) = A^\cdot(G)$.
به یک گراف G، k_l -ناپایدار می‌گوییم، هرگاه $A^+(G) \neq \emptyset$، $A^-(G) \neq \emptyset$ و $A^\cdot(G) = \emptyset$.
به یک گراف G، k_l -آمیخته می‌گوییم، هرگاه $A^+(G) \neq \emptyset$ $A^-(G) \neq \emptyset$ و $A^\cdot(G) \neq \emptyset$.
به یک گراف G، k_l^+ -بحرانی می‌گوییم، هرگاه $A(G) = A^+(G)$.

نشان می‌دهیم که در هر پنج دسته یک گراف وجود دارد به طوری که عدد احاطه‌گری آن حداقل ۴ است. از این رو پنج دسته گراف‌ها در l، $\emptyset$ نیستند. ما همچنین خاصیت گراف‌ها را در دسته‌های مختلف اثبات می‌کنیم.
چون هر راس از درجه‌ی ۲ در خانواده‌ی l مشمول در یک مثلث است، مشاهده‌ی زیر را داریم.

مشاهده ۲.۴.۳. هیچ گراف دو بخشی در l، راس از درجه‌ی ۲ ندارد.

برای راحتی در نمادگذاری، F_1 را کلاس همه‌ی گراف‌های K_l^- - بحرانی، F_2 را کلاس گراف‌های K_l - پایدار، F_3 را کلاس گراف‌های K_l - ناپایدار، F_4 را کلاس گراف‌های K_l - آمیخته و F_5 را کلاس گراف‌های K_l^+ - بحرانی در نظر می‌گیریم.

۵.۳ خانواده F_1

در این قسمت خانواده‌ی F_1 یا k_l^- - بحرانی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۵.۳. [۱۰] برای هر $k \geq ۳$ گراف $G \in F_1$ وجود دارد به طوری که $\gamma_t(G) = k$.

اثبات. با توجه به مباحث قبل، اگر G را به صورت گردایه‌ی $K_k o K_1$ تعریف کنیم در این صورت $\gamma_t(G) = k$ و G یک K_l^- - بحرانی است. لذا $G \in F_1$. □

قضیه ۲.۵.۳. اگر $G \in F_1$، یک گراف دو بخشی باشد، آن گاه $\delta(G) \geq ۳$.

اثبات. فرض کنید $G \in F_1$، یک گراف دو بخشی باشد، با توجه به مشاهده‌ی ۲.۴.۳ هیچ گراف دوبخشی در l راس از درجه‌ی ۲ ندارد. از این رو کافی است نشان دهیم G برگ

ندارد. برای این منظور از برهان خلف استفاده می‌کنیم.
برهان خلف) فرض کنید G یک برگ w داشته باشد و x همسایه‌ی w باشد. چون $A(G) \neq \emptyset$ است، پس x یک همسایه مانند u دارد که از w مجزاست. طبق قضیه‌ی ۴.۳.۳، (iii) داریم $|N(x) \cap (S \setminus \{u, w\})| \geq ۱$.
لذا در گراف G، x حداقل از درجه‌ی ۳ است. فرض کنید $v \in N(x) \setminus \{u, w\}$. چون G یک گراف دوبخشی است، بنابراین $N(x)$ در G مستقل است. $uxv \in A(G)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید S یک $\gamma_t(G_x^{uv})$- مجموعه باشد. w یک برگ در همسایگی x در G_x^{uv} است. لذا x یک راس پشتیبان در G_x^{uv} است که ایجاب می‌کند $x \in S$. اما S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G نیز محسوب می‌شود. بنابراین $\gamma_t(G) \leq |S| = \gamma_t(G_x^{uv})$. از طرفی $G \in F_۱$ است که تناقض دارد. لذا $\delta(G) \geq ۳$.

□

۶.۳ خانواده ی $F_۲$

در این قسمت خانواده‌ی $F_۲$ یا k_l - پایدار را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۶.۳. [۱۰] برای هر $k \geq ۴$، گراف $G \in F_۲$ موجود است به طوری که $\gamma_t(G) = k$.

اثبات. گراف G را گردایه‌ی $K_k o K_۲$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\gamma_t(G) = k$ و $V(K_k)$ یک $\gamma_t(G)$- مجموعه‌ی یکتاست.
حال فرض کنید $uxv \in A(G)$ باشد، به طوری که $ux \in E(K_k)$ و v همسایه‌ی x از درجه‌ی ۲ باشد. بنابراین $\gamma_t(G_x^{uv}) = \gamma_t(G) = k$ و دو $\gamma_t(G_x^{uv})$ ایجاد می‌شود که یکی $V(K_k)$ و دیگری $(V(K_k) \setminus \{x\}) \cup \{v\}$. لذا $G \in F_۲$ و $\gamma_t(G) = k$. □

ما نشان خواهیم داد که در خانواده‌ی K_l-ناپایدار هیچ درختی وجود ندارد. برای این منظور با یک لم شروع می‌کنیم.

لم ۲.۶.۳. اگر $G \in F_۲$ باشد، آن‌گاه G هیچ راس پشتیبان قوی ندارد.

اثبات. فرض خلف) فرض کنید $G \in F_۲$ باشد و G یک راس پشتیبان قوی مانند x داشته باشد به طوری که u و v دو برگ در همسایگی x باشند. فرض کنید S یک $\gamma_t(G_x^{uv})$-مجموعه باشد. در این صورت $S \supseteq \{u, v\}$. لذا $(S \setminus \{u, v\}) \cup \{x\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای

G است در نتیجه $\gamma_t(G) \leq |S| - ۱ = \gamma_t(G_x^{uv}) - ۱$. اما با توجه به این که $G \in F_۲$، یک تناقض ایجاد می‌شود. □

قضیه ۳.۶.۳. [۱۰] در خانواده‌ی $F_۲$ درخت وجود ندارد.

اثبات. برهان خلف) فرض کنید درخت T وجود داشته باشد. به طوری که $v_۱v_۲\cdots v_r$ و $(r \geq ۲)$، طولانی‌ترین مسیر در T باشد. با توجه به لم قبل، درخت T، هیچ راس پشتیبان قوی ندارد. به خصوص $v_۲$ یک راس پشتیبان قوی نیست. لذا $d_T(v_۲) = ۲$. که با مشاهده‌ی ۲.۴.۳ در تناقض است. □

۷.۳ خانواده $F_۳$ و $F_۴$

در این قسمت خانواده‌ی $F_۳$ یا K_l - ناپایدار و $F_۴$ یا K_l - آمیخته را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم این خانواده از گراف‌ها ناتهی هستند.

قضیه ۱.۷.۳. [۱۰] برای هر $k \geq ۴$، گراف $G \in F_۳$ موجود است به طوری که $\gamma_t(G) = k$.

اثبات. گراف G را گردایه‌ی $C_koK_۱$، $(k \geq ۴)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت هر $V(C_k)$ یک راس پشتیبان در G است و هر مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی در گراف G، شامل مجموعه‌ی $V(C_k)$ است. لذا $\gamma_t(G) \geq k$. اما $V(C_k)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای G است. لذا $\gamma_t(G) \leq k$. بنابراین $\gamma_t(G) = k$.

حال نشان می‌دهیم $G \in F_۳$. برای این منظور فرض کنید $uxv \in A(G)$ باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول) uxv یک مسیر در دور C_k باشد. در این حالت $\gamma_t(G_x^{uv}) = \gamma_t(G) + ۱$.

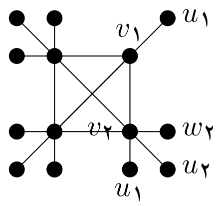
حالت دوم) $ux \in E(C_k)$ و v یک برگ در همسایگی x باشد. در این حالت $\gamma_t(G_x^{uv}) = \gamma_t(G) - ۱$. بنابراین $A^+(G) \neq \emptyset$ و $A^-(G) \neq \emptyset$ و $A^۰(G) = \emptyset$. لذا $G \in F_۳$ و $\gamma_t(G) = k$.

□

قضیه ۲.۷.۳. [۱۰] برای هر $k \geq ۳$، گراف $G \in F_۴$ موجود است به طوری که $\gamma_t(G) = k$.

اثبات. گراف G را گردایه‌ی $K_koK_۳$، با حذف دو برگ در همسایگی یک راس پشتیبان قوی در G تعریف می‌کنیم. فرض کنید $V(K_k) = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_k\}$ باشد به طوری که $v_۱$ یک

راس در G با فقط یک برگ در همسایگی اش باشد، که آن را u_1 می‌نامیم. فرض کنید u_2 و w_2 دو برگ دیگر در همسایگی v_2 در گراف G هستند. می توان شکل زیر را در نظر گرفت.



شکل ۱۵.۳

هر راس $V(K_k)$ یک راس پشتیبان قوی در G است. لذا $\gamma_t(G) \geq k$. از طرفی $V(K_k)$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G است که داریم $\gamma_t(G) \leq k$. در نتیجه $\gamma_t(G) = k$.

در این صورت

۱. $\gamma_t(G_{v_1}^{u_1 v_2}) = \gamma_t(G) - 1$، $\gamma_t(G_{v_2}^{u_2 v_1}) = \gamma_t(G)$ و $\gamma_t(G_{v_2}^{u_2 w_2}) = \gamma_t(G) + 2$

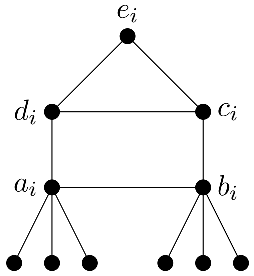
بنابراین $A^-(G) \neq \emptyset$، $A^+(G) \neq \emptyset$ و $A^\circ(G) \neq \emptyset$. لذا $G \in F_4$ و $\gamma_t(G) = k$. □

۸.۳ خانواده F_5

در این قسمت خانواده‌ی F_5 یا K_l^+ - بحرانی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

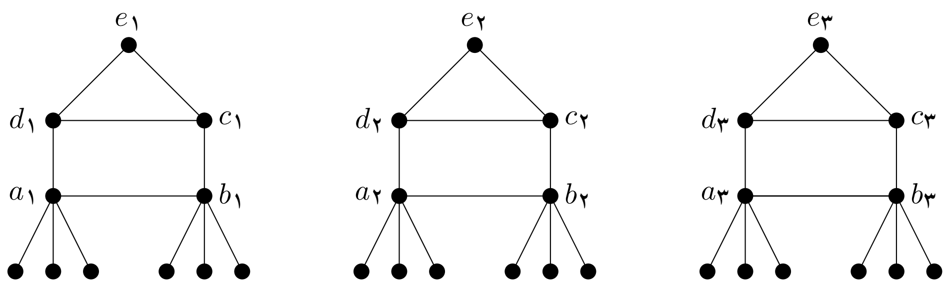
قضیه ۱.۸.۳. [۱۰] برای هر $k \geq 4$، گراف $G \in F_5$ موجود است به طوری که $\gamma_t(G) = k$.

اثبات. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که k زوج باشد. یعنی $k = 2l$ و $l \geq 2$. فرض کنید برای $1 \leq i \leq l$، H_i گراف نشان داده شده در شکل زیر باشد که رئوس آن از درجه‌ی حداقل ۲ هستند.



شکل ۱۶.۳

فرض کنید گراف G از $\bigcup_{i=1}^{l} H_i$ با افزودن یال‌های $\{e_i a_{i+1} \mid 1 \leq i \leq l\}$ حاصل شود. به عنوان مثال اگر $k = 6$ باشد آن‌گاه $l = 3$ و شکل زیر را خواهیم داشت.

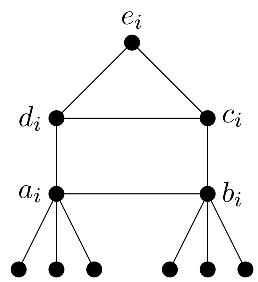


شکل ۱۷.۳

فرض کنید $A = \cup_1^l \{a_i\}$ و $B = \cup_1^l \{b_i\}$ و S یک $\gamma_t(G)$ - مجموعه باشد.
$A \cup B$ یک مجموعه‌ی پشتیبان قوی در G است و چون هر مجموعه‌ی احاطه گر کلی در یک گراف شامل همه‌ی رئوس پشتیبان است پس $A \cup B \subseteq S$. از طرفی $A \cup B$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای G است که داریم $S \subseteq A \cup B$. لذا $S = A \cup B$. در نتیجه

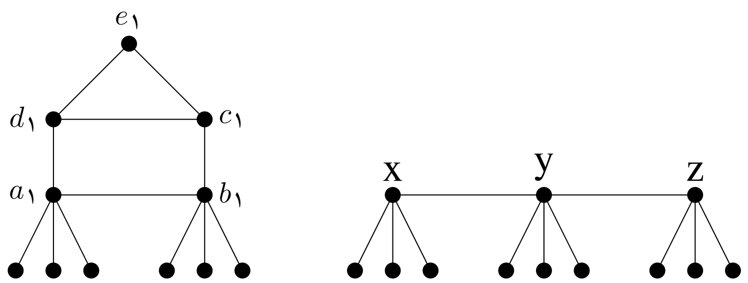
$$\gamma_t(G) = |S| = |A \cup B| = 2l = k.$$

بنابراین S یک $\gamma_t(G)$ - مجموعه‌ی یکتاست.
از سوی دیگر چون G هیچ راسی از درجه‌ی ۲ ندارد لذا $l \in G$. فرض کنید $uxv \in A(G)$ باشد و S^* یک $\gamma_t(G_x^{uv})$ - مجموعه باشد. صرفنظر از انتخاب uxv رئوس S رئوس پشتیبان در G_x^{uv} هستند. لذا $S \subseteq S^*$ و $\gamma_t(G) \leq \gamma_t(G_x^{uv})$.
فرض خلف) فرض کنید $\gamma_t(G) = \gamma_t(G_x^{uv})$ باشد. لذا $S = S^*$ و مجموعه‌ی S یک $\gamma_t(G_x^{uv})$ - مجموعه است. واضح است که برای هر uxv دلخواه، مجموعه‌ی S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G_x^{uv} نمی‌باشد و این تناقض است. بنابراین $\gamma_t(G_x^{uv}) > \gamma_t(G)$. لذا $G \in F_5$ و $\gamma_t(G) = k$.
حال حالتی را در نظر می‌گیریم که k فرد باشد. یعنی $k = 2l + 1$ و $l \geq 2$. فرض کنید برای $1 \leq i \leq l - 1$، H_i گراف نشان داده شده در شکل زیر باشد.



شکل ۱۸.۳

فرض کنید H^* یک هزارپا با رشته‌ی $P_۳ = (x, y, z)$ و کد $(۳,۳,۳)$ باشد و گراف F از $H^* \cup (\cup_۱^{l-۱} H_i)$ با افزودن یال‌های $\{e_i a_{i+۱(mod l)} \mid ۱ \leq i \leq l-۲\} \cup \{e_{l-۱}x\}$ حاصل شود. به عنوان مثال فرض کنید $l = ۲$ باشد. در این صورت شکل زیر را خواهیم داشت.



شکل ۱۹.۳

در شکل فوق، فرض کنید $X = \{x, y, z\}$، $Y = \bigcup_۱^{l-۱}\{a_i\}$ و $Z = \bigcup_۱^{l-۱}\{b_i\}$ و D یک $\gamma_t(F)$–مجموعه باشد. X و Y و Z مجموعه رئوس پشتیبان قوی در F هستند. لذا $X \cup Y \cup Z \subseteq D$ همچنین $X \cup Y \cup Z$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای F است لذا $D \subseteq X \cup Y \cup Z$. در نتیجه $X \cup Y \cup Z = D$ و داریم

$$\gamma_t(F) = |D| = |x \cup Y \cup Z| = ۲l + ۱ = k.$$

لذا D یک $\gamma_t(F)$– مجموعه‌ی یکتاست.

از طرفی چون F هیچ راسی از درجه‌ی ۲ ندارد پس $F \in l$. فرض کنید $uxv \in A(F)$ و D^* یک $\gamma_t(D_x^{uv})$ – مجموعه باشد. صرفنظر از انتخاب uxv، رئوس D رئوس پشتیبان در F_x^{uv} هستند. لذا $D \subseteq D^*$ و $\gamma_t(F) \leq \gamma_t(F_x^{uv})$.

برهان خلف) فرض کنید $\gamma_t(F) = \gamma_t(F_x^{uv})$ لذا $D = D^*$ و مجموعه‌ی D یک $\gamma_t(F_x^{uv})$– مجموعه است. واضح است که برای هر uxv دلخواه، مجموعه‌ی D یک مجموعه‌ی

احاطه‌گر کلی برای F_x^{uv} نمی‌باشد و این تناقض است. بنابراین $\gamma_t(F_x^{uv}) > \gamma_t(F)$. لذا $F \in F_5$ و $\gamma_t(F) = k$. $\square$

لم ۲.۸.۳. فرض کنید $G \in F_5$، و $V = V(G)$ باشد. S را $\gamma_t(G)$ - مجموعه‌ی دلخواه در نظر بگیرید. ویژگی‌های زیر برقرار است.

الف) اگر u و v رئوس مجاوری در $G[S]$ از درجه‌ی حداقل ۲ باشند آن گاه هیچ یک از همسایگی u و v، S -همسایگی اختصاصی خارجی ندارند.

ب) هر مولفه‌ی $G[S]$، متعلق به $\{P_2, P_3, P_4\}$ است.

ج) مولفه‌های $G[V \setminus S]$، گراف‌های کامل هستند.

د) هر راس در $V \setminus S$، حداکثر دو همسایه در S دارد.

ه) اگر یک راس $v \in V \setminus S$ دو همسایه در S داشته باشد، آن گاه هر همسایه‌ی v در $V \setminus S$ نیز با دو راس فوق در S مجاور است.

اثبات. الف) فرض کنید u و v رئوس مجاوری از درجه‌ی حداقل ۲ باشند. برهان خلف) فرض کنید u یا v یک S همسایگی اختصاصی خارجی دارند. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $w \in epn(u, S)$. بنابراین $wuv \in A(G)$ است.

از طرفی S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G_u^{vw} است. لذا $\gamma_t(G_u^{vw}) \leq |S| = \gamma_t(G)$ که تناقض است زیرا G یک K_l^+ - بحرانی است. لذا $epn(u, S) = epn(v, S) = \emptyset$.

اثبات ب) فرض کنید C یک مولفه‌ی دلخواه در $G[S]$ باشد به طوری که شامل دور C^* است. با توجه به قسمت قبل هیچ راسی در $V(C^*)$، S همسایگی اختصاصی خارجی ندارد. با فرض مینیمال بودن S، هر راس در C^* یک S همسایگی اختصاصی داخلی دارد. فرض کنید u و v رئوس مجاوری در C^* و $w \in ipn(u, S)$ باشد. در این صورت $wuv \in A(G)$ است. S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای G_u^{vw} است. لذا $\gamma_t(G_u^{vw}) \leq \gamma_t(G)$ که با توجه به این که $G \in F_5$ است، تناقض دارد.

بنابراین مولفه‌ی C یک درخت است. فرض کنید C شامل یک راس مانند x، به طوری که $d_c(x) \geq 3$ باشد. فرض کنید u و v دو راس مجاور با x در C باشد. $uxv \in A(G)$ و S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G_x^{uv} است. لذا $\gamma_t(G_x^{uv}) \leq \gamma_t(G)$. از طرفی چون $G \in F_5$ است تناقض دارد.

بنابراین $\delta(C) = 2$، که ایجاب می کند C یک مسیر است. اگر C یک مسیر با پنج راس یا بیشتر باشد، با مینیمال در نظرگرفتن S، سومین راس این مسیر باید یک S همسایگی

اختصاصی خارجی داشته باشد. که با قسمت (الف) در تناقض است. لذا $C \in \{P_۲, P_۳, P_۴\}$ می‌باشد.
اثبات ج) فرض خلف) فرض کنید B مولفه‌ای در $G[V \setminus S]$ باشد به طوری که کامل نباشد. حال مسیر $uxv \in A(G)$ را در مولفه‌ی فوق در نظر بگیرید، به طوری که $\{u, x, v\} \subseteq V(B)$ باشد. S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای G_x^{uv} نیز است. لذا $\gamma_t(G_x^{uv}) \leq \gamma_t(G)$ که با $G \in F_۵$ در تناقض است. لذا مولفه‌ی B شامل هیچ مسیر القایی $P_۳$ نیست، که ایجاب می‌کند B کامل است.
اثبات د) فرض کنید $v \in V \setminus S$، به طوری که $|N(v) \cap S| \geq ۳$ باشد. با توجه به قسمت (ب) هر مولفه‌ی $G[S]$، به صورت $P_۲$، $P_۳$ یا $P_۴$ است. پس حداقل ۲ همسایه‌ی v در S مانند x و y وجود دارد به طوری که مجاور نباشند. در این صورت S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G_v^{xy} است. لذا $\gamma_t(G_v^{xy}) \leq \gamma_t(G)$ که با $G \in F_۵$ در تناقض است. بنابراین $|N(v) \cap S| \leq ۲$.

اثبات ه) فرض کنید $v \in V \setminus S$ و $|N(v) \cap S| = ۲$ و w یک همسایگی v در S باشد. $u \in V \setminus S$ را در نظر بگیرید، چون $G[V \setminus S]$ کامل است، لذا $uv \in E(G)$. حال فرض کنید u و w مجاور نباشد. در این صورت $uvw \in A(G)$ را در نظر می گیریم. S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G_v^{uw} نیز است. لذا $\gamma_t(G_v^{uw}) \leq \gamma_t(G)$ که تناقض است. بنابراین $uw \in E(G)$. □

نتیجه ۳.۸.۳. فرض کنید $G \in F_۵$، گرافی فاقد مثلث و S یک $\gamma_t(G)$ − مجموعه‌ی دلخواه باشد. سپس خاصیت‌های زیر در گراف G برقرار است.
الف) هر مولفه‌ی $G[S]$ یک $P_۲$ − مولفه، یا $P_۳$ − مولفه است.
ب) $V(G) \setminus S$ یک مجموعه‌ی مستقل است.

اثبات. اثبات الف) فرض کنید C مولفه‌ای در $G[S]$ باشد. با توجه به لم ۲.۸.۳ (ب)، C به صورت یکی از مسیرهای $\{P_۲, P_۳, P_۴\}$ است. فرض کنید $C = P_۴$ و $xyzw$ یک مسیر در C باشد. چون $G \in F_۵$ فاقد مثلث است، لذا G راس از درجه ی ۲ ندارد. بنابراین $d_G(y) \geq ۳$ می باشد. حال فرض کنید $y' \in V \setminus S$ یک همسایگی y باشد. y' با z و x مجاور نمی‌باشد زیرا G فاقد مثلث است. بنابراین $y'yz \in A(G)$. S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای $G_y^{y'z}$ است لذا $\gamma_t(G_y^{y'z}) \leq |S| = \gamma_t(G)$ که با $G \in F_۵$ در تناقض است. بنابراین $C = P_۲$ یا $C = P_۳$ است.

اثبات ب) (فرض خلف) فرض کنید $xy \in E(G)$ موجود باشد به طوری که $\{x, y\} \subseteq V \setminus S$

باشد. با توجه به لم ۲.۸.۳، $\{x,y\} \subseteq G[V \setminus S]$ یک گراف کامل K_2 است. چون S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G است لذا x و y توسط S احاطه می‌شوند. پس x و y از درجه‌ی حداقل ۲ هستند و چون G فاقد مثلث است، بنابراین $d_G(x) \geq 3$ و $d_G(y) \geq 3$ می‌باشد. با توجه به لم ۲.۸.۳ (د) و (ه)، نتیجه می‌گیریم دو راس x و y توسط دو راس یکسان در S احاطه می‌شوند که ایجاب می‌کند G شامل مثلث است که تناقض دارد. پس $V \setminus S$ مجموعه‌ای مستقل است. □

قضیه ۴.۸.۳. [۱۰] فرض کنید G یک گراف در l باشد که فاقد مثلث است. $G \in F_5$ است اگر وتنها اگر یکی از خواص زیر برقرار باشد.

الف) G یک ستاره از مرتبه‌ی حداقل ۴ باشد.

ب) G یک هزارپا با رشته‌ی P_2 و کد (i,j)، به طوری که $i,j \geq 2$ باشد.

ج) G یک هزارپا با رشته‌ی P_3 و کد (i,j,h)، به طوری که $i,h \geq 2$ و $j \geq 1$ باشد.

اثبات. کافیست از یک طرف اثبات کنیم. فرض کنید $G \in F_5$ و G ستاره نباشد. نشان می‌دهیم G یک هزارپا است. G فاقد مثلث است لذا G راس از درجه‌ی ۲ ندارد. فرض کنید S یک $\gamma_t(G)$ − مجموعه باشد، به طوری که $G[S]$ ناهمبند و C_1 و C_2 دو مولفه‌ی $G[S]$ باشند. G همبند است، لذا حداقل یک راس از C_1 مانند u با یک راس $v \in V \setminus S$ مجاور است، همچنین v با یک راس از C_2 نیز مجاور است و چون G فاقد مثلث است، لذا $d(v) \geq 3$ می‌باشد. با توجه به نتیجه‌ی قبل $V(G) \setminus S$مستقل است پس $N(v) \subseteq S$. لذا v با حداقل ۳ راس در S مجاور است که با توجه به لم ۲.۸.۳، (هر راس در $V \setminus S$ حداکثر ۲ همسایه در S دارد.) در تناقض است. لذا $G[S]$ همبند است.
با توجه به نتیجه‌ی ۳.۸.۳، $G[S] = P_2$ یا $G[S] = P_3$ می‌باشد. از طرفی $V \setminus S$ یک مجموعه مستقل است و چون G فاقد مثلث است، لذا راس از درجه‌ی ۲ ندارد و هر راس در $V \setminus S$ یک برگ در G است. اگر $G[S] = P_2$ باشد، چون G ستاره نیست، آن‌گاه G یک هزارپا با رشته‌ی P_2 و کد (i,j) به طوری که $i,j \geq 2$، می‌باشد. اگر $G[S] = P_3$ باشد آن‌گاه $G[S]$ یک مسیر xyz است. به طوری که $|epn(x,S)| \geq 1$ و $|epn(z,S)| \geq 1$ می‌باشد و چون G راس از درجه‌ی ۲ ندارد لذا همه‌ی رئوس در S، از درجه‌ی حداقل ۳ هستند. لذا G یک هزارپا با رشته‌ی P_3 و کد (i,j,h)، به طوری که $i,h \geq 2$ و $j \geq 1$ می‌باشد. □

قضیه ۵.۸.۳. [۱۰] اگر G یک گراف r − منتظم $(r \geq 3)$، از مرتبه‌ی n در F_5 باشد، آن‌گاه $\gamma_t(G)$ زوج است و $\gamma_t(G) < \frac{2n}{r+1}$.

اثبات. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و S یک $\gamma_t(G)$ - مجموعه باشد. B را یک مولفه در $G[V\setminus S]$ در نظر بگیرید. طبق لم ۲.۸.۳ (ج)، B کامل است. $B=K_p$ که $P\geq ۱$.
طبق لم ۲.۸.۳ (د)، هر راس در $V\setminus S$ حداکثر با ۲ راس در S مجاور است. از طرفی S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای G است لذا هر راس در $V\setminus S$ حداقل با یک راس در S مجاور است. بنابراین $B=K_{r-۱}$ یا $B=K_r$.
حال فرض کنید A مولفه‌ای در $G[S]$ باشد. با توجه به لم ۲.۸.۳ (ب)، $A\in\{P_۲,P_۳,P_۴\}$ است.
فرض کنید $A=P_۴$ و $abcd$ یک مسیر در A باشد. چون $r\geq ۳$ است، لذا b یک همسایگی مانند x در $V\setminus S$ دارد. x با c مجاور است، چون در غیر این صورت $xbc\in A(G)$ است و با اعمال بالابر یالی روی مسیر فوق، S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی برای G_b^{xc} است. لذا $\gamma_t(G_b^{xc})\leq\gamma_t(G)$ که با $G\in F_۵$ در تناقض است. لذا $xc\in E(G)$ و $N(x)\cap S=\{b,c\}$ می‌باشد. حال فرض کنید C مولفه ای در $G[V\setminus S]$ باشد که شامل x است. $C=K_{r-۱}$ و هر راس در $V(C)$ با دو راس b و c مجاور است. در این صورت $d_G(b)\geq r+۱$ می‌باشد که تناقض است.
لذا فرض می‌کنیم $A=P_۳$ باشد. در این صورت abc را یک مسیر در G در نظر می‌گیریم. چون $r\geq ۳$ است، لذا b یک همسایگی مانند x در $V\setminus S$ دارد. $xc\in E(G)$. چون در غیر این صورت $xbc\in A(G)$ است و با اعمال بالابر یالی روی مسیر فوق، S یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G_b^{xc} است. لذا $xc\in E(G)$ و x با دقیقا دو راس b و c در S مجاور است به عبارت دیگر $N(x)\cap S=\{b,c\}$. حال B را مولفه‌ای شامل x در نظر می‌گیریم. $B=K_{r-۱}$ و $d_G(b)\geq r+۱$ می‌باشد که تناقض است. لذا $A=P_۲$ می‌باشد.
چون A مولفه‌ی دلخواهی در $G[S]$ است و $G[S]$ شامل مسیرهای مجزایی از $K_۲$ است، لذا $\gamma_t(G)$ زوج است و داریم

$$|[S,V\setminus S]|=(r-۱)|S|. \tag{۱.۳}$$

و طبق لم ۲.۸.۳، هر راس در $V\setminus S$ حداکثر با دو راس در S مجاور است. لذا

$$|[S,V\setminus S]|\leq ۲|V\setminus S|=۲(n-|S|). \tag{۲.۳}$$

و از (۱.۳) و (۲.۳) داریم

$$(r-۱)|S|\leq ۲(n-|S|).$$

$$r|S| - |S| \leq 2n - 2|S| \longrightarrow |S| \leq \frac{2n}{r+1}.$$

حال نشان می دهیم تساوی برقرار نیست.
فرض خلف) فرض کنید $\gamma_t(G) = \frac{2n}{r+1}$ باشد. در این صورت هر راس در $V \setminus S$، با دقیقا دو راس در S مجاور است. فرض کنید x یک راس دلخواه در $V \setminus S$، و u_2 و u_3 دو همسایه‌ی x در S باشد. X_1 را مولفه‌ای شامل x در نظر می‌گیریم. لذا $X_1 = K_{r-1}$. طبق لم ۲.۸.۳ (ه)، برای هر $v \in V(X_1)$، $N(v) = (V(X_1) \setminus \{v\}) \cup \{u_2, u_3\}$ می باشد.
اگر $u_2u_3 \in E(G)$ باشد آن‌گاه $G = K_{r+1}$ است. در این صورت G گرافی کامل و $A(G) = \emptyset$ است که تناقض ایجاد می‌شود زیرا $G \in l$ و $A(G) \neq \emptyset$. لذا $u_2u_3 \notin E(G)$.
فرض کنید که در $G[S]$، u_1 با u_2، و u_3 با u_4 مجاور باشد. لذا u_1u_2 و u_3u_4، P_2 - مولفه‌هایی در $G[S]$ هستند.
حال فرض کنید $y \in V \setminus S$ مجاور با u_4 و X_2 مولفه‌ای در $G[V \setminus S]$ شامل y باشد. هیچ راسی در X_1، مجاور با u_4 نمی‌باشد لذا $X_1 \neq X_2$. فرض کنید u_5 همسایه‌ی دیگر y در S باشد. $X_2 = K_{r-1}$، و هر راس در $V(X_2)$، با دو راس u_4 و u_5 مجاور است. با ادامه‌ی این روند رئوس S را می توان به صورت $S = \{u_1, \cdots, u_{2t}\}$ که $t \geq 2$، نمایش داد. همچنین برای $i = 1, \cdots, t$، $u_{2i-1}u_{2i}$،P_2 مولفه‌هایی در $G[S]$ هستند و مولفه‌های $G[V \setminus S]$ به وسیله‌ی $X_1, \cdots, X_t$ نمایش داده می‌شوند، به طوری که برای هر i، $X_i = K_{r-1}$ و برای هر $i = 1, \cdots, t$ به مد $2t$، هر راس در $V(X_i)$ با دو راس u_{2i} و u_{2i+1} مجاور می‌باشد.
فرض کنید x_1 یک راس دلخواه در X_1 باشد. اگر $t \geq 3$باشد، در این صورت $S \setminus \{u_1, u_4\} \cup \{x_1\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای G، با اندازه‌ی کمتر از $\gamma_t(G)$ می‌باشد که تناقض است. لذا $t = 2$ است. فرض کنید $u, v \in X_1$ و $y, w \in X_2$ باشد. لذا $\{u, v, y, w\}$ یک مجموعه‌ی احاطه گر کلی برای $G^{uu_1}_{u_2}$ است و $\gamma_t(G^{uu_1}_{u_2}) \leq \gamma_t(G) = 4$ که با توجه به این که $G \in F_5$ است، در تناقض است لذا $\gamma_t(G) < \frac{2n}{r+1}$. □

پیوست آ

توپولوژی‌های روی فضاهای اندازه‌ها و ارزیابی‌ها

آ.۱ توپولوژیِ مبهمِ روی فضای اندازه‌ها

چند توپولوژی وجود دارد که می‌توان آنها را برای مجموعه اندازه‌ها انتخاب کرد. یک شرط قابل قبول و حداقلی این است که بخواهیم که اگر یک تور $(m_i)_{i\in I}$ به m همگرا باشد آنگاه ما باید در $\mathbb{R}$ داشته باشیم $\int f dm \longrightarrow \int dm_i$. پارامتر اساسی آزاد در این بحث، انتخاب مجموعه توابع از fهایی است که می‌توانند جالب توجه باشند و چندین احتمال که در بعضی نوشته‌ها، به عنوان مثال [؟]، بحث شده است. با نگاهی به قضیه نمایش ریس، قضیه ؟؟، تعریف می‌کنیم:

تعریف آ.۱.۱ . فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. توپولوژی مبهم $\mathcal{V}$ روی $\mathfrak{M}(X)$، ضعیف‌ترین توپولوژیی است به طوری که به ازای هر $f \in \mathrm{C}(X)$، نگاشت $m \mapsto \int f dm :$ $\mathfrak{M}(X) \to \mathbb{R}$، پیوسته است.

برای یک فضای هاسدورف فشرده، داریم $\mathfrak{M}(X) \cong \mathrm{C}\dagger(X)$ و می‌توان دید که توپولوژی مبهم، در حقیقت، تحدید همان توپولوژیی است که معمولاً ضعیف*-توپولوژیِ روی فضای دوگان $\mathrm{C}^*(X)$ به مخروط $\mathrm{C}^\dagger(X)$ نامیده می‌شود. در این رابطه، تعمیم‌های معادل زیر را در حالتی که فضای اصلی، مرتب فشرده باشد، را داریم:

گزاره آ.۱.۲. فرض کنید $(X,\mathcal{O},\leq)$ یک فضای مرتب فشرده باشد. برای یک تور $(m_i)_{i\in I}$ از اندازه‌های رادون کراندار و یک اندازه رادون کراندار m، احکام زیر معادلند:

(۱) $(m_i)_{i\in I}$ در توپولوژی مبهم به m، همگرا می‌شود، به عبارت دیگر به ازای هر $f\in \mathrm{C}(X)$،

$$\int f dm=\lim_{i\in I}\int f dm_i.$$

(۲) $\int gdm_i$ در $\mathbb{R}$ به $\int gdm$ همگرا می‌شود، به عبارت دیگر به ازای هر $g\in \mathrm{CM}_+(X)$،

$$\int gdm=\lim_{i\in I}\int gdm_i.$$

(۳) $m_i(O)$ به ازای هر $O\in\mathcal{O}$ در توپولوژی همگرا از پایین روی $\mathbb{R}$، به $m(O)$ همگرا می‌شود و $m_i(X)$ در توپولوژی معمولی روی $\mathbb{R}$، به $m(X)$ همگرا می‌شود، به عبارت دیگر، به ازای هر $O\in\mathcal{O}$،

$$m(O)\leqslant \liminf_{i\in I} m_i(O)$$

و

$$m(X)=\lim_{i\in I} m_i(X).$$

اثبات. اثبات (۱) $\Leftarrow$(۲)، بدیهی است، فرض کنید $\int gdm_i$ برای عناصر $\mathrm{CM}_+(X)$، به $\int gdm$ همگرا باشد. در این صورت انتگرال‌ها نیز برای توابعِ از $(\mathrm{CM}_+ - \mathrm{CM}_+)(X)$، همگرا می‌شوند چون تفاضل، پیوسته است. برای تعمیم این ادعا به همه توابع پیوسته f، لم ؟؟ را بکار می‌بریم:

$$\int fdm=\lim_{g\longrightarrow f}\int gdm=\lim_{g\longrightarrow f}\lim_{i\in I}\int gdm_i=\lim_{i\in I}\lim_{g\longrightarrow f}\int gdm_i=\lim_{i\in I}\int fdm_i,$$

که در آن، $g\longrightarrow f$، نشان‌دهنده یک تور از توابعِ از $(\mathrm{CM}_+ - \mathrm{CM}_+)(X)$ محدب به f در سوپریمم نرم است.

تساوی موجود در (۳)، قسمتی از قضیه ۱.۸، در [؟] است. □

توجه داریم که مجموعه توابع $\mathrm{CM}_+(X)$، خیلی کوچک‌تر از است و بنابراین، این واقعیت که $\mathrm{CM}_+(X)$، همان توپولوژی روی $\mathfrak{M}(X)$ را القا می‌کند، جالب توجه است.

لم آ.۱.۳. برای یک فضای مرتب فشرده، ترتیب تصادفی $\preccurlyeq$ روی $\mathrm{C}^\dagger(X)$، در توپولوژی مبهم، بسته است.

اثبات. فرض کنید φ_j و ψ_j، تورهایی از تابعی‌های خطی مثبت باشند که به ترتیب به φ و ψ همگرا هستند به طوری که به ازای هر $j \in J$، $\varphi_j \preccurlyeq \psi_j$. در این صورت به ازای هر $f \in \mathrm{CM}_+(X)$، داریم $\varphi_j(f) \leqslant \psi_j(f)$ و از آنجایی که $\varphi_j(f)$ و $\psi_j(f)$، به ترتیب به $\psi(f)$ و $\psi(f)$، همگرا هستند، لذا نتیجه می‌گیریم که $\varphi(f) \leqslant \psi(f)$، که از آنجا $\varphi \preccurlyeq \psi$. $\square$

در [۱۱] نشان داده شده است که برای یک فضای مرتب فشرده، مجموعه اندازه‌های احتمال، با توپولوژی مبهم و ترتیب تصادفی، باز دوباره، یک فضای مرتب فشرده است. در اینجا یک تعمیم کم اهمیت می‌آوریم:

قضیه آ.۴.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{O}, \leq)$ یک فضای مرتب فشرده باشد.

(۱) $(\mathfrak{M}(X), \mathcal{V}, \preccurlyeq)$ یک فضای مرتب است.

(۲) زیرمجموعه‌های $\mathfrak{M}_1(X)$

مراجع

[1] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen and C.L. Suffel, Domination alteration sets in graphs, Discrete Math. 47 (1983) 153-161.

[2] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. " Graph Theory With Applications. " North Holland New York, (1980). 1, 4

[3] H. D. Booth, R. Govindon, M. A. Langston and S. Ramachandramurthi, Fast algorithms for immersion testing, J. *Algorithms* 30 (1999) 344-378.

[4] R. C. Brigham, P. Z. Chinn and R. D. Dutton, Vertex-domination critical graphs, *Networks* 18 (1988) 173-179.

[5] J. R. Carrington, F . Harary and T . W . Haynes, Changing and unchanging the domination number of a graph, J. Combin. Math. Combin. Math. Combin. Comput. **9** (1991) 57-63.

[6] E. J. Cockayne, R. M. Dawes, and S. T. Hedetniemi, Total domination in graphs. *Networks* **10** (1980) 211-219.

[7] J. Desormeaux , Adam J. Hall,Tersa W . Haynes , Denise Koessler , Michael A . Langston , Stephanie Rickett and Hamilton Scott. Edge Lifting and Total Domination in Graph , Bulletin of the ICA , Volume 63 (2011) , 77-86

[8] W. J. Desormeaux, A. J. Hall, T. W. Haynes, D. Koessler, M. A. Langston, S. A. Rickett, and H. Scott, Edge lifting and domination in graphs. To appear in *Bull. Inst. Combin. Appl.*

[9] W. J. Desormeaux, T. W. Haynes, and M. A. Henning, Domination Edge Lift Critical Trees. To appear in Quaest. Math.

[10] J. Desormeaux , W. Haynes , A . Henning , Edge Lifting and Total Domination in Graph , May 2011.

[11] W. J. Desormeaux, T. W. Haynes, and M. A. Henning, Total domination stable graphs upon edge addition. *Discrete Math.* **310** (2010) 3446-3454. 54

[12] M. R. Fellows and M. A. Langston, On well-partial-order theory and its application to combinatorial problems of VLSI design, SIAM J. Discrete Math. **5** (1992) 117-126.

[13] W. Goddard, T. W. Haynes, M. A. Henning, and L. C. van der Merwe, The diameter of total domination vertex critical graphs. *Discrete Math.* **286** (2004) 255-261.

[14] D. Hanson and P. Wang, A note on extremal total domination edge critical graphs. *Util. Math.* **63** (2003) 89-96.

[15] T. W. Haynes and M. A. Henning, Changing and unchanging domination a classification, *Discrete Math.* **272** (2003) 65-79.

[16] T. W. Haynes, M. A. Henning, and L.C. van der Merwe, Total domination critical graphs with respect to relative complements. Ars Combin. **64** (2002) 169-179.

[17] T. W. Haynes, M. A. Henning, and L.C. van der Merwe, Domination and total domination critical trees with respect to relative complements. *Ars Combin.* **59** (2001) 117-127.

[18] T. W. Haynes, R. C. Brigham and R. D. Dutton, Extremal graphs domination insensitive to the removal of k edges, *Discrete Appl. Math.* **44** (1991) 295- 304.

[19] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater (eds), *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1998.

[20] M. A. Henning, Recent results on total domination in graphs: A survey. *Discrete Math.* **309** (2009) 32-63.

[21] L. Lovasz *Combinatorial Problems and Exercises*, 2nd Ed., North Holland, New York, 1993.

[22] L. Lovasz, Lecture, *Conference of Graph Theory,* Prague, 1974.

[23] W. W. Rouse Ball, Mathematical recreation and problems of past and present times, Mack Millan, London, (1982). 10.

[24] D. P. Sumner and P. Blitch, Domination critical graphs, J. Combin. Theory Ser. B 34 (1983) 65-76.

[25] L. C. van der Merwe, T. W. Haynes, and C. M. Mynhardt. Total domination edge critical graphs with maximum diameter. *Discuss. Math. Graph Theory***21** (2001) 187-205.

[26] L. C. van der Merwe, T. W. Haynes, and C.M. Mynhardt, 3-domination critical graphs with arbitrary independent domination numbers. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **27** (1999) 85-88.

[27] L. C. van der Merwe, *Total domination edge critical graphs.* Ph. D. Thesis. University of South Africa, 1999.

[28] L. C. van der Merwe and M. Loizeaux, Bounds on the order of 4-critical graphs with diameter two. *Util. Math.* **78** (2009) 107-119.

[29] D. B. West. " *Introduction to graph Theory. "* Seconded Prentice- Hall, Upper Saddle River NJ, (2001). 1.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

احاطه گری	Domination
احاطه گری کلی	Total domination
بالابر یالی	Edge lifting
برگ	Leaf
درخت	Tree
دور	Cycle
راس پشتیبان	Support vertex
راس تنها	Isolated vertex
رشته	Spine
زیر گراف القایی	Induced subgraph
عدد احاطه گری	Domination number
عدد احاطه گری کلی	Total domination number
عدد رنگی	Chromatic number
کران	Bound
کران بالا	Upper bound
کران پایین	Lower bound
گراف دو بخشی	Bipartite graph
گراف دو بخشی کامل	Complete bipartite graph
گراف ستاره	Star graph
گراف کامل	Complete graph
گراف منتظم	Regular graph
گراف k− منتظم	K- Regular graph

مجموعه‌ی احاطه گر	Dominating set
مجموعه‌ی احاطه گر کلی	Total-Dominating set
$\gamma(G)-$ مجموعه	$\gamma(G)$ - Set
$\gamma_t(G)-$ مجموعه	$\gamma_t(G)$ - Set
مسیر	Path
هزارپا	Caterpillar
همبند	Connected
همسایگی باز	Open neighborhood
همسایگی بسته	Close neighborhood
همسایگی خصوصی	Private neighborhood
همسایگی خصوصی خارجی	External private neighborhood
همسایگی خصوصی داخلی	Internal private neighborhood

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Bipartite graph	گراف دو بخشی
Bound	کران
Caterpillar	هزارپا
γ_t-Changing	γ_t - ناپایدار
Chromatic number	عدد رنگی
Close neighborhood	همسایگی بسته
Complete bipartite graph	گراف دو بخشی کامل
Complete graph	گراف کامل
Component	مولفه
Connected graph	گراف همبند
Corona	تاجی
Dominating set	مجموعه‌ی احاطه گر
Domination	احاطه گری
Domination number	عدد احاطه گری
Edge lifting	بالابر یالی
External private neighbor	همسایگی اختصاصی خارجی
Induced subgraph	زیر گراف القایی
Internal private neighbor	همسایگی اختصاصی داخلی
Isolated vertex	راس تنها
Leaf	برگ
Lower bound	کران پایین
Open neighborhood	همسایگی باز

Path .... مسیر
private neighbor .... همسایگی اختصاصی
Regular graph .... گراف منتظم
Strong support vertex .... راس پشتیبان قوی
Support vertex .... راس پشتیبان
Total domination .... احاطه گری کلی
Total domination number .... عدد احاطه گری کلی
Total domination set .... مجموعه‌ی احاطه گر کلی
Upper bound .... کران بالا
Weak partition .... افراز ضعیف

Surname: khazaei | Name: Mitra

Title: Edge lifting and total domination in graphs

Supervisor: Dr. Nader Jafarirad

Degree: Master of Science | Subject: Department of Mathematics

Field: Graph

University of shahrood | Faculty Of Mathematical Sciences

Date: 2013 | Number of pages: 62

Keywords: Edge Lifting, Dominating, Total Dominating.

Abstract

Let vertices u and v be at distance two apart in a graph G, and let x be a common neighbor of u and v. The operation of removing the edges ux and vx from G, while adding the edge uv to G is called edge lifting.

In chapter 1, we state some basic and elementary consept which we use for the next chapter.

In chapter 2, we study the effect of edge lifting on the Domination number of the Graphs.

In chapter 3, we inveswtigate the effect of edge lifting on the total Domination of the Graphs.

University of shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Department of Mathematics

Edge lifting and total domination in graphs

Supervisor

Dr. Nader Jafarirad

by

Mitra khazaei

2013