دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گزارش نهایی طرح پژوهشی

تعمیم قضیه لیوبیچ برای اندازه لبگ مجموعه ژولیای چند جمله ایهای متقارن

کد طرح ۲۳۰۱۵

مجری : احمد زیره

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گزارش نهایی طرح پژوهشی

تعمیم قضیه لیوبیچ برای اندازه لبگ مجموعه ژولیای چند جمله ایهای متقارن

کد طرح ۲۳۰۱۵

مجری : احمد زیره

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است وتاریخ های تصویب وخاتمه ان به ترتیب ۸٦/۸/۱۳ و ۸۷/۲/۲۲ می باشد .

صفحه

چکیده

در این گزارش، سیستم دینامیک چندجمله‌ایهامتقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$ را بررسی می‌کنیم. در حالت کلی از زمان فاتو یک مسئله باز به این صورت مطرح بود که؛ حدس :[۵] مجموعهٔ ژولیای هر چند جمله‌ای دارای اندازهٔ لبگ برابر صفر است .

در حالت خاص که چند جمله ای هذلولوی باشد این مساله حل شده است و حدس صحیح است.

ما این حدس را در حالت خاصی که چند جمله‌ای متقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$ متناهی بار نرمال پذیر باشد و مجموعهٔ ژولیای J_c آن نقطهٔ نامعین نداشته باشد، اثبات می کنیم.

فصل ۱

مقدمه و پیشنیازها

دراین گزارش ما خلاصه‌ای از تعاریف و قضایای سیستم دینامیک چندجمله‌ای مختلط را بیان میکنیم.

۱—۱ نماد گذاری

میدان اعداد مختلط با نماد $\mathbb{C}$ نمایش داده می شود. فشردهٔ شده تک نقطه ای صفحه مختلط نیزکه همان کرهٔ ریمان می باشد با نماد $\hat{\mathbb{C}}$ نمایانده می شود. منظور از یک دامنهٔ D یک زیر مجموعهٔ باز و همبند از $\mathbb{C}$ می باشد.

برای نگاشت تحلیلی $f : D \to D$، n-امین تناوب آنرا با نماد $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \circ f$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱—۱.۱ یک خانواده از توابع تحلیلی را که بر دامنهٔ مشترک D تعریف شده‌اند، را یک خانوادهٔ نرمال می گوییم، اگر هر دنباله در این خانواده دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا باشد.

در این تعریف، منظور از همگرایی، همگرایی یکنواخت روی بخشهای فشرده است.

لم ۱—۲.۱ (محک منتل)[۸]اگر نقاط a, b, c از کرهٔ $\hat{\mathbb{C}}$ دو به دو متمایز باشند آنگاه هر خانوادهٔ توابع تحلیلی از دامنهٔ دلخواه D به $\hat{\mathbb{C}} - \{a, b, c\}$ یک خانوادهٔ نرمال می باشد.

تعریف ۱–۳.۱ فرض کنیم که $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک نگاشت تحلیلی و غیر ثابت باشد. نقطهٔ $z_{\circ} \in \mathbf{C}$ را در نظر می‌گیریم. اگر همسایگی U حول نقطهٔ $z_{\circ}$ بگونه‌ای موجود باشد، که دنبالهٔ تکرارهای $\{f^n\}_{n\in\mathbf{N}}$ در دامنهٔ U یک خانوادهٔ نرمال بوجود آورد، آنگاه $z_{\circ}$ را یک نقطهٔ منظم می‌نامیم. مجموعهٔ نقاطی که به این معنی منظم باشند را مجموعهٔ فاتو می‌نامیم. مجموعه ژولیا که آن را با$J(f)$ نمایش می دهیم متمم مجموعهٔ فاتو در $\mathbf{C}$ است.

با استفاده از تعریف فوق، مجموعهٔ فاتو یک مجموعهٔ باز و بنا بر این مجموعهٔ ژولیا یک مجموعهٔ بسته می باشد.

به عنوان یک مثال ساده، چند جمله ای درجه دوم $P(z) = z^{۲}$ را در نظر بگیرید. قرص باز$D = \{z \in \mathbf{C}; |z| < ۱\}$ زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ فاتو می باشد چون تکرارهای $\{P^n(z)\}_{n\in\mathbf{N}}$ بر هر زیر مجموعهٔ فشرده از قرص D همگرای یکنواخت به صفر است.

به طور مشابه، خارج قرص، یعنی $\mathbf{C} - \overline{D}$ نیز زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ فاتو می باشد، زیرا تکرارهای $\{P^n(z)\}_{n\in N}$ همگرا به تابع ثابت بی نهایت می باشد. از طرف دیگر، اگر $z_{\circ} \in \partial D$، آنگاه در هر همسایگی $z_{\circ}$ موقع گذشتن از مرزقرص، تابع حدی تکرارهای $\{P^n(z)\}_{n\in N}$ دارای یک پرش ناپیوسته می باشد. پس ∂D همان مجموعهٔ ژولیا تابع $P(z)$ می باشد.

تعریف ۱–۴.۱ فرض کنیم که $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ تحلیلی باشد.**مداربزرگ نقطهٔ** z که با$Go(z)$ نمایش می دهیم، عبارت است از تمام نقاط $z' \in \mathbf{C}$، به طوری که اعداد $n \geq \circ$ و $m \geq \circ$ موجود باشند که در برابری $f^m(z) = f^n(z')$ صدق کنند.

۱–۲ خواص مجموعهٔ ژولیا

در این بخش به بعضی قضایا و خواص مجموعهٔ ژولیای تابع تحلیلی f اشاره می کنیم.

لم ۱—۱.۲ [۷] مجموعهٔ ژولیای $J(f)$ تحت نگاشت f کاملاً ناوردا می باشد. یعنی اگر $z \in J(f)$، آنگاه مدار $Go(z)$ زیر مجموعهٔ $J(f)$ می باشد.

مجموعهٔ فاتو نیز تحت f کاملاً ناوردا است.

لم ۱—۲.۲ [۷] برای هر عدد طبیعی $n \geq ۱$، مجموعهٔ ژولیای f^n، با مجموعهٔ ژولیای f برابراست. به عبارت دیگر، $J(f^n) = J(f)$.

اکنون یک مدار متناوب در نظر بگیرید، به صورت

$$z_۰ \to z_۱ \to \cdots \to z_{n-۱} \to z_n = z_۰.$$

اگر نقاط $z_۱, \cdots, z_n$ نقاط مجزایی باشند، عدد صحیح $n \geq ۱$ را دورهٔ تناوب این مدار می نامیم. مقدار مشتق f را برای این مدار متناوب بصورت زیر

$$\lambda = (f^n)'(z_i) = f'(z_۱).f'(z_۲) \cdots f'(z_n)$$

تعریف می کنیم و آنرا مضرب یا مقدار ویژه این مدار متناوب می نامیم.

تعریف ۱—۳.۲ یک مدار متناوب راجاذب ،دافع و یابی تفاوت می‌نامیم، اگر مضرب آن به ترتیب $|\lambda| < ۱$، $|\lambda| > ۱$، $|\lambda| = ۱$ باشد.

در حالتی که مدار متناوب جاذب باشد حوزهٔ جذب را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۱—۴.۲ فرض کنیم که $(z_i)_{i=۱}^n$ یک مدار متناوب وجاذب باشد. مجموعه باز U راحوزهٔ جذب مدار متناوب گوییم، اگر به ازای هر نقطه $z \in U$ تناوبهای $f^n(z), f^{۲n}(z), f^{۳n}(z), \cdots$ همگرا به نقاط مدار $(z_i)_{i=۱}^n$ باشند.

قضیه ۱—۵.۲ [۷] هر مدار متناوب جاذب به مجموعهٔ فاتو تعلق دارد. در حقیقت، حوزهٔ جذب مدار متناوبِ جاذب زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ فاتو است، و هر مدار متناوب دافع به مجموعهٔ ژولیا تعلق دارد.

اثبات. نقطهٔ ثابت $f(z_\circ) = z_\circ$ را در نظر می گیریم. بسط تیلور f را در همسایگی نقطه $z_\circ$ در نظر بگیریم. اگر $z_\circ$ نقطهٔ جاذب باشدآنگاه تناوبهای f حول $z_\circ$ همگرای یکنواخت به تابع ثابت $z_\circ$ می باشد و این همگرایی برای هر زیر مجموعهٔ فشرده از حوزهٔ جذب نقطهٔ $z_\circ$ برقرار است. پس $z_\circ$ و حوزهٔ جذب آن متعلق به مجموعهٔ فاتو می باشند. اگر $z_\circ$ نقطه ثابت دافع باشد، هیچ زیر دنباله ای از تناوبهای $\{f^n\}_{n\in N}$ حول $z_\circ$ همگرا نمی باشد. چون مضارب $\lambda^n = (f^n)'(z_\circ)$ واگرا می باشد. ■

تعریف ۱—۶.۲ نقطهٔ متناوب $z_\circ$ راسهموی گوییم اگر $\lambda = ۱$ یعنی مضرب آن برابر یک باشد و هیچ تناوب f^n برابر با نگاشت همانی نباشد.

لم ۱—۷.۲ [۷] هر نقطهٔ متناوب سهموی به مجموعهٔ $J(f)$ تعلق دارد.

اثبات. بدون از دست دادن کلیت ، فرض کنیم که مبدا $z = \circ$ نقطهٔ متناوب سهموی f با دورهٔ تناوب $m \geq ۱$ باشد. آنگاه بسط سری تیلور $f^m(z)$ حول نقطهٔ $z = \circ$ چنین است:

$$f^m(z) = z + a_k z^k + a_{k+۱} z^{k+۱} + \cdots \quad , k \geq ۲, a_k \neq \circ.$$

در نتیجه $f^{mp}(z)$ به صورت سری توانی

$$f^{mp}(z) = z + p a_k z^k + \cdots$$

است پس مقدار مشتق k–ام $f^{mp}(z)$ در مبدا برابر $\frac{d^k(f^{mp})}{dz^k}(\circ) = p a_k$ می باشد که با تغییرات p واگرا می باشد، یعنی تناوبهای $\{f^n(z)\}_{n\in N}$ دارای هیچ زیر دنبالهٔ همگرا نیست. پس $z = \circ$ متعلق به $J(f)$ است. ■

لم ۱—۸.۲ [۷] فرض کنیم که $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک نگاشت گویا از درجهٔ دو یا بیشترباشد. آنگاه مجموعهٔ ژولیای آن $J(f)$ ناتهی است.

قضیه ۱—۹.۲ [۷] اگر $z_\circ \in J(f)$، آنگاه مجموعهٔ تصویر معکوس تکرارها، یعنی

$$\{z \in C; \quad f^n(z) = z_\circ, n \geq ۱ \text{ برای بعضی } \}$$

در $J(f)$ چگال است.

۱—۳ چندجمله‌ایها

فرض کنیم $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ $d \geq ۲$ باشد، یعنی

$$f(z) = a_d z^d + a_{d-۱} z^{d-۱} + \cdots + a_۱ z + a_\circ \text{ که } a_d \neq \circ.$$

آنگاه بی نهایت یک نقطه ثابت جاذب چندجمله‌ای f می‌باشد. درحالت خاص مقدار ثابت $R > \circ$ موجود است به‌طوری که هر نقطهٔ z که $|z| > R$ متعلق به حوزهٔ جذب بی نهایت می باشد. حوزهٔ جذب بی نهایت را با نماد $A(\infty)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱—۱.۳ فرض کنیم $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ یک چند جمله‌ای از درجه حداقل ۲ باشد .آنگاه متمم حوزهٔ جذب بی‌نهایت رامجموعهٔ کامل ژولیا می نامیم و با نماد $K(f)$ نمایش میدهیم پس $K(f) = \mathbf{C} - A(\infty)$.

مجموعهٔ $K(f)$ شامل نقاطی می باشد که مدار آنها کراندار است.

لم ۱—۲.۳ [۷] مجموعهٔ کامل ژولیا $K(f)$ یک مجموعهٔ فشرده است و شامل مجموعهٔ $J(f)$ وتمام مولفه های کراندار $\mathbf{C}-J(f)$ می باشد. تمام مولفه های کراندار $\mathbf{C}-J(f)$ همبند ساده می باشند و $J(f)=\partial K(f)$.

قضیهٔ زیر، رفتار چند جمله‌ای f را نزدیک نقطهٔ ثابتِ بی نهایت توصیف می کند.

قضیه ۱—۳.۳ [۸] (بوچر) فرض کنیم $f(z)=z^d+a_{d-1}z^{d-1}+\cdots+a_1z+a_0$ یک چند جمله‌ای از درجه $d\geq 2$ باشد آنگاه مقدار $R>0$ و نگاشت همدیس $\phi:V=\{z\in\mathbf{C};|z|>R\}\to\mathbf{C}$ موجود است به‌طوری که رابطهٔ مزدوج $\forall z\in V,\phi\circ f(z)=(\phi(z))^d$ برقرار می باشد.

در حالت کلی تابع همدیس بوچر نمی تواند به‌طور تحلیلی به کل حوزه‌جذب $A(\infty)$ گسترش یابد. امایک گسترش توسط تابع گرین زیر موجود است.

تعریف ۱—۴.۳ تابع همساز $G(z)=\log|\phi(z)|$ که با روش زیر قابل گسترش به کل $\mathbf{C}$ می باشد راتابع گرین $K(f)$ می گوییم، در اینجا $K(f)$ مجموعهٔکامل ژولیای f و ϕ تابع بوچر f می باشد.

با توجه به رابطهٔ $\phi\circ f(z)=(\phi(z))^d$ داریم $G(z)=\frac{G(f(z))}{d}$.

حال دامنهٔ جاذب بی نهایت یعنی مجموعهٔ $A(\infty)=\bigcup_{n=0}^{\infty}f^{-n}(V)$ را در نظرمی گیریم.

به ازای هر نقطه $z\in f^{-n}(V)$ با قرار دادن $G(z)=\frac{G(f^n(z))}{d^n}$ تابع $G(z)$ قابل گسترش به کل $A(\infty)$ می باشد. حال به ازای هر نقطه $z\in K(f)$ قرار می دهیم $G(z)=0$. آنگاه تابع $G:\mathbf{C}\to R^+$ یک تابع زیر همساز بر کل $\mathbf{C}$ می باشد. تابع G را تابعِ گرینِ مجموعهٔ کامل ژولیای $K(f)$ می گوییم.

قضیهٔ زیر تاثیر نقاط بحرانی چند جمله‌ای $f(z)$ را بر ساختار توپولوژیکی مجموعهٔ ژولیای $J(f)$ توصیف می کند.

قضیه ۱—۵.۳ [۱] فرض کنیم f یک چند جمله‌ای از درجه $d\geq 2$ باشد. اگر مجموعهٔ کامل ژولیای $K(f)$ شامل نقاط بحرانی f باشد آنگاه مجموعه های $K(f)$و $J(f)$ همبند می باشند. در غیر این

صورت اگر حداقل یک نقطه بحرانی در حوزهٔ جذب $A(\infty)$ قرار بگیرد آنگاه مجموعه های $K(f)$و$J(f)$ کاملا ناهمبند می باشند.

در حالتی که $K(f)$ همبند باشد تابع بوچر یک گسترش تحلیلی به نگاشت همدیس $\phi : \mathbf{C} - K \to \mathbf{C} - \overline{D}$ دارد که D قرص واحد حول مبدا می باشد.

فرض کنیم که مجموعهٔ $K(f)$ همبند باشد. دراین صورت تابع همدیسِ $\phi : \mathbf{C} - K \to \mathbf{C} - \overline{D}$ موجود است. تابع وارونِ ϕ را با ψ نمایش می دهیم. پس $\psi : \mathbf{C} - \overline{D} \to \mathbf{C} - K$ همدیس می باشد.

سوال اساسی بررسي شرایطی می باشد که تحت آنها نگاشت ψ دارای یک گسترش پیوسته برمرز $\partial\overline{D}$ باشد.

قضیهٔ کاراتئودوری:[۷] وارونِ نگاشتِ ریمانِ $\psi : \mathbf{C} - \overline{D} \to \mathbf{C} - K$ به‌طور پیوسته به نگاشتی از $\mathbf{C} - D$ به‌روی $\mathbf{C} - int(K)$ قابل گسترش است اگر و تنها اگر مرز ∂K موضعاً همبند باشد.

بااستفاده از قضیهٔ کاراتئودوری نتیجهٔ زیر به‌دست می آید.

قضیه ۱-۶.۳.۳ [۷] فرض کنیم $f(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $d \geq 2$ باشد. آنگاه شرایط زیر با هم معادل می باشند:

- مجموعهٔ $J(f)$ موضعاً همبند است،
- مجموعهٔ $K(f)$ موضعاً همبند است،
- مجموعهٔ $K(f)$ همبند است و نگاشت همدیس $\psi : \mathbf{C} - \overline{D} \to \mathbf{C} - K$ دارای گسترش پیوسته بر مرز $\overline{D}$ می باشد و$f(\psi(w)) = \psi(w^d)$.

با توجه به قضیهٔ فوق، موضعاً همبندي مجموعهٔ $J(f)$ بستگی به رفتارتابع ψ بر دایرهٔ واحد دارد. تکنیک شعاع خارجی، که ذیلاً آن را بررسی می کنیم، کمک فراوانی به فهمیدن موضعاً همبندي $J(f)$ می کند.

تعریف ۱—۷.۳ فرض می کنیم $K(f)$ همبند باشد و $\psi : \mathbf{C}-\overline{D} \to \mathbf{C}-K$ تابع وارون بوچر باشد. تصویرِ شعاع $\{re^{2\pi it}; r > 1\}$ تحتِ نگاشتِ ψ ، یعنی $R_t = \psi\{re^{2\pi it}; r > 1\}$ را شعاع خارجی با زاویهٔ t در دامنهٔ $\mathbf{C}-K$ می نامیم.

با استفاده از رابطهٔ $f(\psi(w^d)) = \psi(w^d)$ به‌وضوح داریم $f(R_t) = R_{dt}$، یعنی شعاع خارجی با زاویهٔ t تحت نگاشت f به شعاع خارجی با زاویهٔ dt تبدیل می‌شود که d درجهٔ f است. در حالتِ خاص، اگر $t = \frac{m}{d-1}$ آنگاه $f(R_t) = R_t$ برای $m = 1, 2, \cdots, d-1$.

تعریف ۱—۸.۳ اگر برای شعاع خارجی $R_t = \psi\{re^{2\pi it}; r > 1\}$ مقدار حد $\lim_{r\to 1}\psi(re^{2\pi it})$ موجود و برابر z_t باشد، می گوییم که شعاع خارجی R_t در نقطهٔ z_t می‌نشیند، در این حالت $z_t \in J(f)$.

اگر مجموعهٔ $J(f)$ موضعاً همبند باشد، آنگاه بنابرویژگیهای پیوستگی مطرح شده در قضیهٔ ۱—۶.۳، هر شعاع خارجی به نقطه‌ای از مجموعهٔ ژولیا همگرا می شود.

تعریف ۱—۹.۳ شعاع خارجی R_t راگویا نامیم اگر زاویهٔ $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ گویا باشد و R_t رامتناوب گوییم اگر مقدار $n \geq 1$ موجود باشد به طوری که $d^n t \equiv t (mod 1)$.

قضیه ۱—۱۰.۳ (سولیوان ـدووادی و هوبارد[7]) فرض کنیم $K(f)$ همبند باشد. آنگاه هر شعاع خارجی متناوب به نقطهٔ متناوب دافع یا سهموی همگرا می باشد.

عکس قضیهٔ فوق نیز برقرار است.

قضیه ۱—۱۱.۳ (دووادی و یوکوز[7]) فرض کنیم $K(f)$ همبند باشد. آنگاه هر نقطهٔ متناوب دافع یا سهموی، نقطهٔ همگرایی حد اقل یک شعاع خارجی متناوب می باشد.

قضیه ۱—۱۲.۳ (سولیوان-دووادی[۷]) اگر مجموعهٔ ژولیا $J(f)$ موضعاً همبند باشد، آنگاه هر نقطهٔ متناوب $J(f)$ یک نقطهٔ دافع یا سهموی می باشد.

یک زیر مجموعه در فضای چند جمله‌ایها وجود دارد که از ویژگی خاصی برخوردار است، در تعریف زیر آن را توصیف می کنیم.

تعریف ۱—۱۳.۳ فرض کنیم $f(z)$ چند جمله‌ای از درجهٔ $d \geq ۲$ باشد و C_f مجموعهٔ نقاط بحرانی f باشد. چند جمله ای $f(z)$ را هذلولوی نامیم اگر $J(f)\bigcap\overline{C^+(f)} = \emptyset$ که در آن $C^+(f) = \bigcup_{n=۱}^{\infty} f^n(C_f)$.

با توجه به شرایط نقاط بحرانی در چند جمله‌ای هذلولوی، نتایج جالبی برای این نوع از چند جمله ایها به دست می آید که مهمترین آنها دو قضیه مهم زیر می باشد.

قضیه ۱—۱۴.۳ [۷] اگر چند جمله‌ای $f(z)$ هذلولوی باشد و مجموعهٔ $K(f)$ همبند باشد، آنگاه $K(f)$ موضعا همبند است.

قضیه ۱—۱۵.۳ [۸] اگر چندجمله‌ای $f(z)$ هذلولوی باشد، آنگاه اندازه لبگ مجموعهٔ $J(f)$ برابر صفر است.

حدس زیر یکی از مهمترین مسائل در سیستم دینامیکی چند جمله‌ایها می‌باشد که با حدس MLC معادل است.

حدس HD[۵] اندازه لبگ مرز مجموعه مندلبرات برابر صفر است.

۱—۴ نگاشت‌های شبه چندجمله‌ای

مجموعهٔ ژولیای بعضی از چندجمله‌ای های درجه بالا،به طور موضعی شبیه مجموعهٔ ژولیای چند جمله‌ای درجهٔ پایین تر می باشد. چنین اتفاقی باعث می شود که چندجمله ای به طور موضعی رفتاری شبیه یک چندجمله‌ای درجه پایین تر داشته باشد. توصیف دقیق چنین رفتاری اهمیت خاصی دارد.

تعریف ۱—۱.۴ فرض کنیم که U و V دو دامنهٔ همبند ساده و کراندار باشند. به طوری که $\overline{U} \subset V$ و نگاشت $f : U \to V$ یک نگاشت تحلیلی و سره باشد. آنگاه سه تایی (f, U, V) را یک‌نگاشت شبه—چندجمله‌ای می نامیم.

برای یک نقطه $z_0 \in V$، تعداد نقاط مجموعهٔ $\{f^{-1}(z_0)\}$ درجهٔ شبه—چندجمله‌ای می‌باشد. لازم به ذکر است که درجهٔ شبه—چندجمله‌ای به انتخاب نقطهٔ $z_0 \in V$ بستگی ندارد.

مثال ۱—۲.۴ برای هر چندجمله‌ای $P(z)$، همسایگی کوچک W را حول نقطهٔ∞ در نظر می گیریم. سه تایی $(P(z), \mathbf{C} - P^{-1}(\overline{W}), \mathbf{C} - \overline{W})$ یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای هم درجه با $P(z)$ است.

تعریف ۱—۳.۴ برای هر نگاشت شبه—چندجمله‌ای (f, U, V) از درجهٔ حداقل دو، مجموعهٔ {برای هرعدد طبیعیn، $K_f = \{z \in U; f^n(z) \in U$ را مجموعه کامل ژولیای شبه—چندجمله‌ای (f, U, V) می نامیم و مجموعهٔ ژولیای شبه—چندجمله‌ای را برابر با مرز K_f می گیریم و با J_f نمایش می‌دهیم، یعنی $J_f = \partial K_f$.

حال نگاشت های شبه—چندجمله‌ای خاصی را در نظر می گیریم به طوری که مجموعهٔ ژولیای آنها همبند باشد.

تعریف ۱—۴.۴ فرض کنیم که نگاشت $F : U \to V$ یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای درجه دوم باشد. F را نرمال پذیر گوییم اگر عدد صحیح $n > 1$ و زیر دامنهٔ $U' \subset U$ موجود باشند، به طوری که U' شامل یگانه نقطهٔ بحرانی F باشد و n—امین تکرار F که با F_1 نمایش می‌دهیم، یعنی $F_1 := F^n : U' \to V' \subset V$ یک نگاشت شبه چند جمله‌ای درجه دو باشد و مجموعهٔ ژولیای آن J_{F_1}، همبند باشد.

یک نگاشت شبه چندجمله‌ای درجه دوم $F : U \to V$ را دو بار نرمال پذیر گوییم، اگر F نرمال پذیر باشد و همچنین نگاشت نرمال شده $F^{m_1} : U_1 \to V_1$ نیز نرمال پذیر باشد. در نتیجه نگاشت های شبه چند جمله ای درجه دوم $F_1 := F^{m_1} : U_1 \to V_1$ و $F_2 := F^{m_2} : U_2 \to V_2$ با مجموعه های ژولیای J_{F_1} و J_{F_2} همبند را داریم.

به طور مشابه نگاشت شبه چند جمله ای درجه دوم $F : U \to V$ را k—بار نرمال پذیر می نامیم، اگر اعداد صحیح $1 < m_1 < m_2 < \cdots < m_k$ و زیر دامنه های $U_{m_k} \subset \cdots \subset U_{m_2} \subset U_{m_1} \subset U$ و $V_{m_k} \subset \cdots \subset V_{m_2} \subset V_{m_1} \subset V$ موجود باشند به طوری که توابع $F_i = F^{m_i} : U_i \to V_i$ برای $i = 1, 2, \ldots, k$ نرمال شده باشند. نهایتاً شبه چند جمله‌ای درجه دوم $F : U \to V$ را بی نهایت بار نرمال پذیر گوییم اگر به ازای هر $k > 0$، $F : U \to V$، k— بار نرمال پذیر باشد.

۱—۵ جدول یوکوز

از ابزارهای اساسی که با استفاده از آن می توان اندازه لبگ مجموعهٔ ژولیا را بررسی کرد، جدول یوکوز می باشد. این جدول برای چند جمله ای درجه دوم $Q_c(z) = z^2 + c$ ساخته شده است و قابل گسترش به شبه چندجمله‌ایهای درجه دوم می باشد. حال به معرفی این جدول می پردازیم.

فرض کنیم که مجموعهٔ ژولیای $J(Q_c)$ همبند باشد و به علاوه، هر دو نقطهٔ ثابتِ چند جمله‌ای $Q_c(z)$، دافع باشند. آنگاه یکی از نقاط ثابت (β)، نقطهٔ همگرایی شعاع خارجی با زاویهٔ صفر است و نقطهٔ ثابتِ

دیگر (α)، نقطهٔ همگرایی تعداد متناهی q، شعاع خارجی متناوب $(q \geq ۲)$ می باشد.

فرض کنیم که $g_Q : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ تابع گرین مجموعهٔ کامل ژولیای $K(Q_c)$ باشد و $\cdots \to c_۱ \to c_۰ = ۰$ مدار بحرانی نقطهٔ بحراني $c_۰ = ۰$ باشد.

دامنهٔ $\{z \in \mathbf{C}; g_Q(z) < ۱\}$ توسط q شعاع خارجی، که به نقطهٔ α همگرا می باشند، به q ناحیه تقسیم می شود. جدول یوکوز در عمق صفر عبارت است از بستار q ناحیه تقسیم شدهٔ فوق که به صورت $P_۰(c_۰), P_۰(c_۱), \cdots, P_۰(c_{q-۱})$ نمایش داده می شود. هر $P_۰(c_i)$ نمایش یکتا تکه‌ای از جدول یوکوز در عمق صفر است که شامل نقطهٔ $c_i = Q_c^i(۰)$ می باشد. حال به روش استقراء عمق های بعدی را می سازیم.

فرض کنیم $P_d^{(۱)}, \cdots, P_d^{(m)}$ تکه های جدول در عمق d باشند. آنگاه هر مولفهٔ همبند مجموعهٔ $Q_c^{-۱}(P_d^{(i)})$ را یک تکه از جدول $P_{d+۱}^{(j)}$ درعمق $d+۱$ می نامیم.

به عنوان یک مثال: همیشه تعداد $۲q - ۱$ تکه در عمق یک وجود دارد، که شامل تعداد q تکه $P_۱(c_۰), P_۱(c_۱), \cdots, P_۱(c_{q-۱})$ است که در نقطهٔ α به هم متصل هستند و همراه آنها تعداد $q - ۱$ تکه $P_۱(-c_۱), \cdots, P_۱(-c_{q-۱})$ نیز هست که در نقطهٔ $-\alpha$ به هم متصل هستند.

فرض کنیم مجموعهٔ $J_۰$ به صورت $J_۰ = \bigcup_{n \geq ۰} Q_c^{-n}(\alpha)$ تعریف شده باشد. برای هر نقطهٔ $z \in J(Q_c) - J_۰$، دنبالهٔ نزولی زیر از تکه‌های جدول یوکوز با عمق های متفاوت موجود است به طوری که $P_۰(z) \supset P_۱(z) \supset P_۲(z) \supset \cdots$ که هر $P_i(z)$ تکه ای در عمق i و شامل نقطهٔ z است.

لم ۱—۱.۵ برای هر تکه P_d از جدول یوکوز، اشتراک $P_d \cap J(Q_c)$ یک مجموعهٔ همبند می‌باشد.

اثبات. این مطلب را با استقراء روی عمق d اثبات می کنیم.

در عمق صفر تعداد q تکه $P_۰(c_۰), P_۰(c_۱), \cdots, P_۰(c_{q-۱})$ از جدول داریم که اشتراک $P_۰(c_i) \cap J(Q_c)$ دقیقاً بستار مولفه های $J(Q_c) - \alpha$ می باشند. اگر $W_۱, W_۲$ دو مجموعهٔ باز مجزا باشند که $(W_۱ \cap J(Q_c)) \bigcup (W_۲ \cap J(Q_c)) = P_۰(c_i) \cap J(Q_c)$، آنگاه α باید به یکی از دو مجموعهٔ $W_۱$ یا $W_۲$

تعلق داشته باشد. فرض کنیم α متعلق به W_1 باشد. قرار می دهیم $W'_2 = W_2 \cap int(P_0(c_i))$. بنابراین $W_2 \cap J(Q_c) = W'_2 \cap J(Q_c)$. یعنی $J(Q_c)$ زیر مجموعهٔ اجتماع دو مجموعهٔ باز مجزای W'_2 و $W_1 \cup \bigcup_{j\neq i} int(P_0(c_j))$ می باشد. اما $J(Q_c)$ همبند است. بنابراین $W'_2 \cap J(Q_c)$ تهی می باشد. در نتیجه $P_0(c_i) \cap J(Q_c)$ همبند است.

حال فرض کنیم P_{n+1} یک تکه در عمق $n+1$ باشد و $P'_n = Q_c(P_{n+1})$.

حالت اول: اگر نقطهٔ بحرانی $z = 0$ در P_{n+1} نباشد، آنگاه نگاشت $Q_c : P_{n+1} \cap J \to P'_n \cap J$ یک همسانریختی می باشد، پس $P_{n+1} \cap J$ همبند می شود.

حالت دوم: اگر نقطهٔ بحرانی $z = 0$ در $J(Q_c) \cap P_{n+1}$ قرار بگیرد و $J(Q_c) \cap P_{n+1}$ همبند نباشد، آنگاه مولفهٔ همبندی L از $J(Q_c) \cap P_{n+1}$ را که شامل نقطهٔ بحرانی نیست در نظر بگیریم. بنابراین $Q_c(L)$ شامل مقدار بحرانی $Q_c(0)$ نیست، از طرفی $Q_c(0)$ متعلق به $J(Q_c) \cap P'_n$ می باشد. بنابراین $Q_c(L)$ یک مولفهٔ همبندي $J(Q_c) \cap P'_n$ نمی باشد. پس نقطهٔ $z' \in Q_c(L)$ وجود دارد، به طوری که هر همسایگي z' شامل نقاطی از $J(Q_c) - P'_n$ می باشد. اگر $y \in L$ یک تصویر معکوس z' باشد، آنگاه نگاشت $Q_c : J(Q_c) \to J(Q_c)$ در نقطهٔ y به طور موضعی همسانریخت نمی باشد. در حالی که می‌دانیم نگاشت $Q_c : J(Q_c) \to J(Q_c)$ فقط در نقطه بحرانی موضعاً همسانریخت نیست. ■

به هر دنبالهٔ نزولی از تکه های جدول با عمق های متفاوت زیر

$$P_0(z) \supset P_1(z) \supset P_2(z) \supset \cdots$$

مجموعهٔ همبند و فشردهٔ

$$\Im(z) = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n(z)$$

نسبت داده می‌شود.

دلیل اصلی برای ساخته شدن جدول یوکوز نتیجهٔ زیر است.

گزاره ۱—۲.۵ اگر $Q_c(z) = z^۲ + c$ چند جمله ای درجه دوم باشد به طوری که در هر نقطه $z \in J(Q_c) - J_۰$ مجموعه $\Im(z)$ تک نقطه‌ای باشد، آنگاه‌مجموعهٔ ژولیا، $J(Q_c)$، در نقطهٔ z موضعاً همبند خواهد بود.

اثبات. هر نقطه $z \in J(Q_c)$ در یک دنبالهٔ نزولی از تکه‌های جدول

$$P_۰(z) \supset P_۱(z) \supset P_۲(z) \supset \cdots$$

قرار می گیرد.

حالت اول. اگر z نقطهٔ درونی هر تکه $P_n(z)$ باشد، یعنی $\forall n, z \in int(P_n(z))$ آنگاه بنابر لم ۱—۱.۶، هر اشتراک $P_i(z) \cap J(Q_c)$ به شکل یک همسایگی همبند حولِ نقطهٔ z می‌باشد و چون قطرِ تکه‌های $P_n(z)$ به صفر همگرا می باشد، پس $J(Q_c)$ در نقطهٔ z موضعاً همبند است.

حالت دوم. اگر z بر مرز بعضی تکه‌های $P_n(z)$ قرار بگیرد، یعنی z تصویر معکوسی از نقطهٔ ثابت α باشد، آنگاه z در درون اجتماع q تکه در عمق n، مثلاً $P_n^۱ \cup \cdots \cup P_n^q$ قرار می‌گیرد، P_n^iها در نقطهٔ z به هم چسبیده‌اند. چون قطر P_n^i ها به صفر همگرا می باشد باز هم این اجتماعِ متناهی در عمق های خیلی بزرگ، یک همسایگی همبندی برای z را تشکیل می‌دهند. ■

مسالهٔ موضعاً همبندي مجموعهٔ ژولیا، نتیجه‌ای از برقرای شرط زیر می باشد.

مسالهٔ موضعاً همبندی: چند جمله ای $Q_c(z) = z^۲ + c$ چه شرایطی را داشته باشد، به طوری که به ازای هر $z \in J(Q_c)$ اشتراک $\bigcap_{n \geq ۰} P_n(z)$ تک نقطه‌ای شود؟

برای این کار مدول یک طوق را معرفی می کنیم. چنانچه مشاهده خواهیم کرد، مسالهٔ واگرایی سريِ مدولِ طوق ها و اشتراک تک نقطه‌ای $\bigcap_{n \geq ۰} P_n(z)$ با هم معادل می شوند.

۱—۵—۱ طوق جدول یوکوز

فرض کنیم که $z \in J(Q_c) - J_\circ$. دنبالهٔ نزولی از تکه های جدول یوکوز را که شامل نقطهٔ z می باشد در نظر می‌گیریم . فرض کنیم $P_\circ(z) \supset P_1(z) \supset \cdots$ این دنباله باشد. به ازای هر عمق d، طوق مربوط به این دنباله را در نظر می‌گیریم که عبارت است از $A_d(z) = P_d(z) - int(P_{d+1}(z))$.

حال اگر تکهٔ $P_{d+1}(z)$ اکیداً درون $P_d(z)$ قرار داشته باشد، آنگاه مدول $\mathrm{mod}(A_d(z))$ یک عدد حقیقی مثبت می باشد. در حالتی که $\partial P_d(z) \cap \partial P_{d+1}(z) \neq \emptyset$، مقدار $\mathrm{mod}(A_d(z))$ را برابر صفر در نظر می گیریم.

همچنان که در[۲] ذکر شده است، دلیل معرفی طوق های دنباله تکه‌های جدول، نتیجه‌ای از آنالیز مختلط است که در زیر توصیف شده است.

لم ۱—۳.۵ اگر برای طوق های $A_\circ(z), A_1(z), A_2(z), \cdots$، سری زیر

$$\sum_{d=\circ}^{\infty} mod(A_d(z))$$

واگرا باشد، آنگاه مجموعهٔ $\Im(z)$ تک نقطه‌ای می‌شود.[۲]

طوق های فوق زیرمجموعه‌های پیچیده‌ای در صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ می باشند. ولی تحت نگاشت $Q_c(z)$ به همدیگر تبدیل می شوند. مدول های آنها تحت نگاشت تحلیلی دارای رفتار ساده‌ای می باشد، که در لم زیر توصیف شده است.

از لم زیر برای ارتباط بین مدول والدها و مدول مولودها استفاده می کنیم.

لم ۱—۴.۵ فرض کنیم V و V' دو قرص توپولوژیک بسته باشند و $f : V' \to V$ یک نگاشت پوشا، تحلیلی و سره از درجهٔ d باشد. اگر $U \subset V$ یک زیرمجموعهٔ فشرده و همبند ساده باشد و $U' \subset V'$ یک مولفه از $f^{-1}(U)$ باشد، آنگاه

$$mod(V' - U') \geq \frac{1}{d} mod(V - U).$$

تساوی موقعی برقرار است که تحدید نگاشت f به U' از درجهٔ d باشد. یعنی $f: U' \to U$ یک نگاشت تحلیلی و سره از درجهٔ d باشد.

اثبات. می توان فرض کرد که V برابر قرص بسته واحد $\overline{D_1}$ و U برابر قرص بسته $\overline{D_r}$ می‌باشد که $r < 1$. حال اگر r_iها را برابر قدرمطلق، مقادیرِ بحرانيِ تابعِ f در نظر بگیریم، آنگاه طوق های

$$A_i = \{z \in D_1; r_i, |z| < r_{i+1}\}$$

در دامنهٔ $D_1 - D_r$ توسط تابع وارون f^{-1} به طور همدیس به طوق‌های A'_i در دامنهٔ $V' - U'$ نگاشته می‌شوند، به طوری که هر طوق A'_i با درجهٔ حداکثر d توسط تابع f به طوق A_i نگاشته می شود. از طرفی حداقل یکی از این طوق های A'_i ناحیهٔ U' را در بر می‌گیرد. بنابراین

$$mod(D_1 - D_r) = \sum mod(A_i) \leq d \sum mod(A'_i) \leq mod(V' - U').$$

■

هدف تکنیک تابلو یافتن روشی برای کنترل تغییرات مدول طوق ها می باشد موقعی که تناوب های نگاشت $Q_c(z)$ بر آن اثر می کند.

فصل ۲

اندازهٔ لبگ مجموعهٔ ژولیای J_C

در این فصل با تحدید شرایطی برتوابع f_c و مجموعه ژولیای $J_c = J(f_c)$، نشان می‌دهیم که اندازهٔ لبگ مجموعهٔ ژولیای J_c برابر صفر می شود. قضیهٔ لیوبیچ در مورد چندجمله‌ای درجه دو $Q_c(z) = z^۲ + c$ را یادآوری کنیم.

قضیهٔ لیوبیچ[۴]: فرض کنیم که چندجمله‌ای درجه دو $Q_c(z) = z^۲ + c$، متناهی بار نرمال پذیر باشد و مجموعهٔ ژولیای $J(Q_c)$ هیچ نقطهٔ نامعین نداشته باشد. آنگاه، اندازهٔ لبگ مجموعهٔ ژولیای $J(Q_c)$ برابر صفر است.

در حالت کلی از زمان فاتو تا آخرین ماه سال ۲۰۰۵، یک مسئله باز به این صورت مطرح بود که:

حدس :[۵] مجموعهٔ ژولیای هر چند جمله‌ای دارای اندازهٔ لبگ برابر صفر است .

در حالت خاص که چند جمله ای هذلولوی باشد این مساله حل شده است و حدس صحیح است.

ما این حدس را در حالت خاصی که چند جمله‌ای متقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$ متناهی بار نرمال پذیر باشد و مجموعهٔ ژولیای J_c آن نقطهٔ نامعین نداشته باشد، اثبات می کنیم.

در این فصل از نتایج و گزاره‌های فصل سوم استفاده می‌شود. از نماد Λ برای نمایش اندازهٔ لبگ استفاده می‌شود .

۲—۱ اکیداً بازگشت پذیری تابلوی بحرانی $T(c^\circ)$

برای تعریف اکیداً بازگشتی، از تابع τ یوکوز فصل سوم استفاده می‌کنیم . تابع یوکوز به این صورت بود که : به هر عدد طبیعی $m \in N$ بزرگترین عدد صحیح $n \in [\circ, m-1]$ را نسبت می‌داد بطوری که تکهٔ بحرانی $V_m(c^\circ)$ از عمق n تحت نگاشت f_c^{m-n} شامل اولین نقطهٔ بحرانی باشد، و اگر چنین n موجود نباشد $\tau(m)$ را برابر ۱ − قرار می‌دهیم.

به خاطر خاصیت تقارنی که نقاط بحرانی چند جمله‌ای $f_c(z)$ دارند، تعریف زیر را فقط برای یک نقطهٔ بحرانی دلخواه c° ارائه می‌کنیم.

تعریف ۲—۱.۱ تابلوی نقطهٔ بحرانی $T(c^\circ)$ را اکیدا بازگشت پذیر گوییم اگر $\tau(m) \to +\infty$ موقعیکه $m \to \infty$.

نتیجه ۲—۲.۱ اگر تابلوی نقطهٔ بحرانی $T(c^\circ)$ اکیداً بازگشت پذیر باشد، آنگاه تابلوی بقیهٔ نقاط بحرانی نیز اکیداً بازگشت پذیراند.

تعریف ۲—۳.۱ نقطهٔ دلخواه $z \in \mathbf{C}$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ نقاط ω-حدی z عبارت‌است از

$$\omega(z) = \cap_{m \geq \circ} \overline{\{f_c^k(z), k \geq m\}}.$$

حال نتیجه زیر را داریم که‌اساساً از فاتو است(به عنوان مرجع، کتاب مک‌مولن [٦] صفحهٔ ۴۲ را می‌توان دید).

لم ۲—۴.۱ فرض کنیم $f_c(z) = z(z^d + c)$ و $C(f_c)$ مجموعهٔ نقاط بحرانی f_c باشد. اگر $\Lambda(J_c) > \circ$ آنگاه تقریباً برای همهٔ نقاط $z \in J_c$ داریم

$$\omega(z) \subset \bigcup_{c\in C(f_c)} \omega(c)$$

$$C(f_c) \subset \bigcup_{c\in C(f_c)} \omega(c)$$

بنابراین، اگر تابلوی نقطهٔ بحرانی $T(c^\circ)$ بازگشتی نباشد، آنگاه $\Lambda(J_c) = \circ$.

دقیقا مشابه با لمِ ۵ مقالهٔ لیوبیچ [۴]، نتیجهٔ زیر برای چندجمله‌ای متقارن $f_c(z) = z(z^d + c)$ برقرار است.

نتیجه ۲—۵.۱ اگر تابلوی نقطهٔ بحرانی $T(c^\circ)$ اکیداً بازگشتی نباشد، آنگاه $\Lambda(J_c) = \circ$.

لم ۲—۶.۱ دو شرط زیر معادل می‌باشند:

- (آ)تابلوی نقطهٔ بحرانی $T(c^\circ)$ اکیداً بازگشتی می‌باشد:
- (ب)برای هر $\epsilon > \circ$ وجود دارد N با خاصیت زیر:

هرگاه $z^- = \{z, z_{-1}, ..., z_{-n}\}$ یک مدار معکوس در $\omega(c^\circ)$ باشد و قرص $B(z,\epsilon)$ در طول مدار $\bar{z}$ به طور همدیس توسط f_c^{-1} برگردد، آنگاه $n \leq N$.

اثبات.(آ)$\Leftarrow$(ب)عدد طبیعی l وجود دارد که $V_l(z) \subset B(z,\epsilon)$. چون نگاشتِ معکوس f_c^{-1} بر قرص $B(z,\epsilon)$ به طور همدیس اثر می‌کند، بنابر این نگاشتِ f_c^{-1} بر $V_l(z)$ در طول z^- به طور همدیس اثر می‌کند.

از طرفی، چون $z_{-n} \in \omega(c^\circ)$، بنابراین وجود دارد $s \in N$ به طوری که $f^s(c^\circ) \in V_{l+n}(z_{-n})$. بنابر این عدد طبیعی t وجود دارد که تکهٔ $V_{l+n+t}(z_{-n})$ شامل یک نقطهٔ بحرانی c^i باشد. بنابراین نگاشت $f_c^{n+t} : V_{l+n+t}(c^i) \to V_l(z)$ یک نگاشت پوششی با نقطهٔ بحرانی c^i است. بنابراین، کرانِ $N = l + n + t$ به دست آمد.

(ب)⇐(آ)

فرض کنیم(فرض خلف) تابلوی بحرانی $T(c^\circ)$ اکیدا بازگشت پذیر نباشد. یک دنبالهٔ کراندار $\{l_i\}$ و یک دنبالهٔ بی‌کران $\{m_i\}$ که $m_i > N$ موجودند به قسمی که $f_c^{m_i} : V_{m_i+l_i}(c^\circ) \to V_{l_i}(c^i)$ یک نگاشت پوششی منشعب دو لایه باشد. چون نقاط بحرانی متناهی می‌باشند، یکی از آنها را که تکرار می شود در نظر می‌گیریم . فرض کنیم که c^k نقطهٔ بحرانی باشد که در دنبالهٔ $\{c^i\}$ تکرار شده است. بنابراین تکهٔ $V_l(c^k)$ به اندازهٔ دلخواهِ m_k مرتبه در طول $\omega(c^\circ)$ معکوسِ همدیس دارد. اما $V_l(c^k) \supset B(c^k, \epsilon)$ ، که این با فرض اولیه تناقض دارد. ■

گزاره ۲—۷.۱ اگر تابلوی نقطه بحرانی $T(c^\circ)$ اکیداً بازگشتی باشد، آنگاه مدار $\{f^n(c^\circ)\}_{n=\circ}^{\infty}$ بالاخره در یک همسایگی نقطهٔ بحرانی (c°) قرار می گیرد.

اثبات. مقدار n را به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم، و تکهٔ بحرانی $V_{dn}(c^\circ)$ را در نظر می‌گیریم. چون تابلوی نقطهٔ بحرانی $T(c^\circ)$ اکیداً بازگشتی است. نقطهٔ بحرانی c^{j_1} و عدد صحیح s_1 وجود دارند که $f^{s_1}(V_{dn}(c^\circ)) = V_{dn-s_1}(c^{j_1})$. از طرفی تابلوی نقطهٔ بحرانی c^{j_1} نیز اکیداً بازگشتی است. بنابر این نقطهٔ بحرانی c^{j_2} و عدد صحیح s_2 وجود دارند که $f^{s_2}(V_{dn-s_1}(c^{j_1})) = V_{dn-s_1-s_2}(c^{j_2})$. با ادامهٔ این روند، دنبالهٔ اعداد صحیح $s_1, s_2, \cdots$ و دنبالهٔ نقاط بحرانی $c^\circ, c^{j_1}, c^{j_2}, \cdots$ را به دست می آوریم.

چون تعداد نقاط بحرانی متناهی می‌باشند، کوچکترین اندیس j_k و l را در نظر می‌گیریم به طوری که $c^{j_{k+l}} = c^{j_k}$. در نتیجه، برای اعداد l و s_k و $m(n) := dn - s_1 - s_2 - \cdots - s_k$، داریم $f^l(V_{m(n)}(c^{j_k})) = V_{m(n)-l}(c^{j_k})$، حال با استفاده از خاصیت تقارن نقاط بحرانی، همین نتیجه برای نقطهٔ بحرانی c° نیز برقرار است، یعنی

$$f^l(V_{m(n)}(c^\circ)) = V_{m(n)-l}(c^\circ).$$

چون اعداد صحیح s_k ،$s_1,\cdots,s_k$ ،l کراندار می باشند، و رابطهٔ $\lim_{n\to\infty} m(n) = +\infty$ برقرار است، نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید. ■

۲—۲ نگاشت شبه چندجمله‌ای تعمیم یافته

نگاشت شبه چند جمله ای (تعمیم یافته) را از مقالهٔ لیوبیچ [۴] ارائه می کنیم. به فرض V و $V_i, i = 1,\cdots,s$ قرص‌های توپولوژیک باز باشند با مرزهای هموار و همچنین V_i ها از هم مجزا باشند و $\overline{V_i} \subset V$.

تعریف ۲—۱.۲ نگاشت پوششی منشعب دو لایه $g : \bigcup V_i \longrightarrow V$ را یک‌نگاشت شبه—چندجمله‌ای(تعمیم یافته) می گوییم و مجموعه کامل ژولیای g را که با $K(g)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$K(g) = \{z : g^n(z) \in \bigcup V_i, n = 0, 1, \cdots,\}$$

و مجموعهٔ ژولیای g را، که با $J(g)$ نمایش می‌دهیم برابر مرز $K(g)$ تعریف می کنیم: $J(g) = \partial K(g)$.

لم زیر را از مقالهٔ لیوبیچ [۴] یادآوری می‌کنیم.

لم ۲—۲.۲ اگر تابلوی بحرانی نگاشت شبه چندجمله‌ای(تعمیم یافتهٔ) g غیر متناوب باشد، آنگاه اندازهٔ لبگ مجموعهٔ کامل ژولیای $K(g)$ برابر صفر است .

گزاره ۲—۳.۲ اگر تابلوی بحرانی $T(c^\circ)$ چندجمله‌ای $f_c(z)$ اکیداً بازگشتی باشد، آنگاه یک نگاشت شبه چندجمله‌ای (تعمیم یافته) $g_\circ : \bigcup V_i^\circ \longrightarrow V^\circ$ با شرایط زیر موجود است:

۱)به ازای هر عدد طبیعی i مقدار $l(i)$ موجود است، به طوری که $g_\circ | \cup V_i^\circ = f_c^{l(i)}$،

۲) c° تنها نقطهٔ بحرانی $g_\circ$ می‌باشد.

اثبات. چون تابلوی نقطهٔ بحرانی $T(c^\circ)$، غیر متناوب است پس، از گزارهٔ ۳—۵.۳ طوق ناتبهگن $U^\circ_{n-1}(c^\circ) \setminus U^\circ_n(c^\circ)$ حول نقطهٔ بحرانی c° موجود است به طوری که $\overline{U^\circ_n(c^\circ)} \subset U^\circ_{n-1}(c^\circ)$. قرار دهید $V^\circ = U^\circ_n(c^\circ)$. با استفاده از گزارهٔ ۴—۷.۱، نقطهٔ بحرانی c° بالاخره به V° برمی‌گردد. حال تمام نقاط بازگشتی مدارِ نقطهٔ بحرانی c° را که به مجموعهٔ V° برمی‌گردند، در نظر می گیریم و آن ها را با $f^{m(i)}(c^\circ)$ نمایش می دهیم$(i = 1, 2, \cdots)$. برای $i = 1, 2, \cdots$ قرار دهیم $l(i) = m(i+1) - m(i)$.
حال تمام تصاویر معکوس V° را در طول زنجیرهای $\{f^k(c^\circ)\}_{k=m(i)}^{m(i+1)}$ در نظر می گیریم. آن ها به صورتِ $\{V^\circ_k = f^{-k}(V^\circ)\}_{k=0}^{l(i)}$ می باشند و V°_k هیچ نقطهٔ بحرانی به غیر از c° را شامل نمی باشد. به ازای هر i، و برای $0 < k < l(i)$، تکه های بحرانی V°_k خارج V° قرار می گیرند. با استفاده از قسمت ۲) از لمِ ۴—۶.۱، مقایر $l(i)$ به طور یکنواخت کراندار می‌باشند. یعنی L موجود است به طوری که برای هر $i = 1, 2, \cdots$ داریم $l_i \leq L$. بنابراین فقط تعداد متناهی مجموعهٔ $V^\circ_{l(i)}$ داریم. حال نشان می دهیم این تعداد متناهی $V^\circ_{l(i)}$ مجزا می‌باشند. در غیراین صورت، برای دو مجموعهٔ متفاوت $V^\circ_{l(i)}$ و $V^\circ_{l(j)}$ باید یکی زیرمجموعهٔ دیگری باشد. فرض کنیم $V^\circ_{l(i)} \supset V^\circ_{l(j)}$، پس $l_j > l_i$. حال با استفاده ازنحوهٔ ساخته شدنِ $V^\circ_{l(i)}$، داریم $f^k(V^\circ_{l(i)}) = V^\circ$. بنابراین $f^k(V^\circ_{l(j)}) \subset V^\circ$ و این متناقض با این مطلب است که‌برای عمق k، وقتی $0 < k < l(j)$، تکه های V°_k بیرونِ V° قرار دارند.

حال نشان می دهیم که برای تکه های متناهی $V^\circ_{l(i)}$ها داریم $\overline{V^\circ_{l(i)}} \subset V^\circ$. در غیر این صورت، $\partial V^\circ_{l(i)} \cap \partial V^\circ \neq \emptyset$ و از طرفی عمق تکه $V^\circ_{l(i)}$ از عمق V° بیشتر است. یعنی $l(i) > n$. بنابراین، برای مقدارِ $j(i) = l(i) - n$، داریم

$$\partial V^\circ \cap \partial f^j(V^\circ) \supset f^j(\partial V^\circ_i \cap \partial V^\circ) \neq \emptyset$$

و این نتیجه با انتخابِ ناتبهگن بودنِ V° در تناقض است. حال نگاشت $g_\circ : \bigcup V^\circ_{l(i)} \to V^\circ$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g_\circ | \cup V^\circ_i = f_c^{l(i)}.$$

$g_\circ$ یک نگاشت شبه—چندجمله‌ای (تعمیم یافته) می‌باشد. از طرفی $g_\circ$ فقط بر تکهٔ بحرانی که شامل c° می باشد، تک ارز نمی‌باشد. پس c° تنها نقطهٔ بحرانی $g_\circ$ می‌باشد. از طرفی چون $g_\circ(f^{m(i)}(c^\circ)) = f^{m(i+1)}(c^\circ) \in V^\circ_{i+1}$ پس $c^\circ \in K(g_\circ)$ ■

۲—۳ صفر بودن اندازهٔ لبگ مجموعه ژولیای J_c تحت شرایط خاص

حال آماده ایم تا قضیهٔ مربوط به اندازهٔ لبگ مجموعهٔ ژولیای J_c را ارائه کنیم. این قضیه تعمیم قضیه‌لیوبیچ[۴] درمورد چندجمله ای درجه دو $Q_c(z) = z^2 + c$ می‌باشد.

قضیه ۲—۳.۱ فرض کنیم که چندجمله‌ای متقارن $f(z) = z(z^d + c)$، متناهی بار نرمال‌پذیر باشد و مجموعهٔ ژولیای J_c هیچ نقطهٔ نامعین نداشته باشد. آنگاه اندازهٔ لبگ مجموعهٔ ژولیای J_c برابر صفر است.

اثبات.چون $f_c(z)$ را متناهی بار نرمال پذیر فرض کرده‌ایم، در صورت وجود، آخرین نرمال پذیر شدهٔ آن، $f_c^p(z)$ را در نظر می گیریم. آنگاه از لم ۴—۴.۱، اندازهٔ لبگ هر دو مجموعهٔ ژولیای $f_c(z)$ و مجموعهٔ ژولیای نرمال پذیر شدهٔ $f_c^p(z)$ با هم برابر اند. بنابراین فرض می‌کنیم که $f_c(z)$ نرمال پذیر نباشد، بی آن که از کلیت بکاهیم.

حال اگر تابلوی نقطهٔ بحرانی $T(c^\circ)$ اکیداً بازگشتی نباشد، آنگاه طبق لم ۴—۵.۱، مجموعهٔ ژولیای J_c دارای اندازهٔ لبگ برابر صفر است.

حال فرض کنیم تابلوی نقطه بحرانی $T(c^\circ)$، اکیداً بازگشتی باشد.

چون $f_c(z)$ نرمال پذیر نیست، طبق گزارهٔ ۳—۴.۳، تابلوی بحرانی $T(c^\circ)$ متناوب نیست. پس طبق گزاره ۴—۳.۲، تابلوی نقطهٔ بحرانی نگاشت شبه—چندجمله‌ای (تعمیم یافته) $g_\circ(z)$ متناوب نمی باشد. بنابراین طبق لم ۴—۲.۲، اندازهٔ لبگ مجموعهٔ کامل ژولیا، $\Lambda(K(g_\circ))$ برابر صفر است. حال اگر $z \in J_c$ نقطهٔ دلخواهی باشد، مقادیر $n(i)$ را در نظر می گیریم به طوری که نقاط $\{f_c^{n(i)}(z)\}_{n(i)}$ در مجموعهٔ V° قراربگیرند. چون $\omega(c^\circ) \cap V^\circ \subset \cup V_i^\circ$، بنابراین برای بعضی $n(i)$ها داریم $f_c^{n(i)}(z) \in K(g_\circ)$. چون اندازهٔ لبگ $\Lambda(K(g_\circ))$ برابر صفر است و $z \in J_c$ دلخواه می باشد پس اندازهٔ لبگ مجموعهٔ ژولیای f_c صفر است، $\Lambda(J_c) = \circ$ و برهان تمام است. ■

کتاب‌نامه

[1] A. F. Beardon, (1991): *Iteration of Rational Functions*, Grad. Texts Math. 132, Springer-Verlag, New York.

[2] B. Branner, and J. H. Hubbard, (1992): The iteration of cubic polynomials, Part II: Pattern and parapatterns, *Acta. Math.* **169**, no 3-4, pp 229-325.

[3] A. Chademan and A. Zireh, (2005): Extension of the Douady-Hubbard's Theorem on Connectedness of the Mandelbrot set to Symmetric Polynomials , *Bull. Iranian Math. Soc*, **31**, no. 1, 77-84.

[4] M. Lyubich, (1991): On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial, *IMS at Stony Brook Preprint.*

[5] C. McMullen, (1994): Frontiers in complex dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **31**, 155-172.

[6] C. McMullen, (1994): Complex dynamics and renormalization, *Annals of Math. Studies,* **142**, Princeton University Press.

[7] J. Milnor, (2000): *Dynamics in one complex variable*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Islad.

[8] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda, (2000): *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press.

[9] M. Shishikura, (1998): The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Ann. of Math.* (2) **147** , no. 2, 225-267.