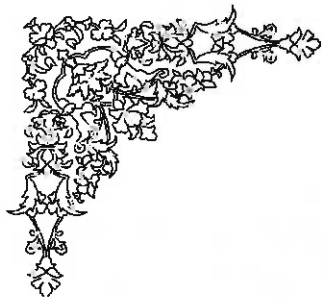


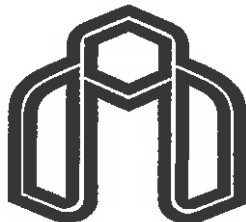
Handwritten notes in the top left corner, including the number 214.



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



بسمه تعالی



دانشگاه صنعتی شاهرود

گزارش نهایی طرح پژوهشی تحت عنوان:

مسائل مکانیابی بر روی نواحی با نرمهای l_p و بلاکی

مجری:

جعفر فتحعلی

عضو هیئت علمی دانشکده ریاضی

دانشگاه صنعتی شاهرود

همکار اصلی:

مهدی زعفرانیه

عضو هیئت علمی دانشکده ریاضی

دانشگاه تربیت معلم سبزوار

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخهای تصویب

و خاتمه آن به ترتیب 86/7/1 و 87/4/9 می باشد.

اسفند 1386

چکیده

در این مقاله به حل مسائل مکانیابی minimax و minisum در فضایی با دو نرم متفاوت و در دو حالت متفاوت می‌پردازیم. در ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که دو نرم l_1 و l_p در طرفین صفحه‌ای با بردار نرمال e_i در فضای R^n وجود دارند، سپس در فضای R^2 حالتی را در نظر می‌گیریم که در طرفین صفحه $x = \alpha$ دو نرم l_1 و بلاکی وجود داشته باشد، در هر کدام از حالت‌های فوق روش حلی برای مسائل مکانیابی minimax و minisum ارائه می‌دهیم.

فهرست مندرجات

4	1- مقدمه
5	2- کوتاهترین مسیر بین دو نقطه
6	3- نرمهای بلاکی
8	4- مسائل <i>MINIMAX</i> و <i>MINISUM</i>
9	4-1- نرمهای r_1 و r_2
11	4-2- نرمهای r_1 و بلاکی
14	5- شرط کافی بهینگی
14	6- نتایج محاسباتی
17	مراجع

فرض کنید در فضای R^n تعدادی نقطه وجود دارد که هر کدام از آنها وزن مشخصی دارند که می‌تواند معرف تقاضای آن نقطه باشد، اگر d معرف فاصله نقاط باشد، مسائل \min و \max به ترتیب به صورتهای زیر نوشته می‌شوند.

$$P_1 : \quad \min z = \sum_{i=1}^m w_i d(x, a_i)$$

$$P_2 : \quad \min_x (\max_{i=1, \dots, m} w_i d(x, a_i))$$

که $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ و $x = (x_1, \dots, x_n)$ نقاطی در فضای R^n هستند. همچنین فرض کنید دو نرم متفاوت در طرفین صفحه $e_i^T x = \alpha$ وجود داشته باشند، در این صورت کوتاهترین مسیر بین دو نقطه که در طرفین این صفحه قرار دارند، از نقطه سومی که بر روی صفحه $e_i^T x = \alpha$ است می‌گذرد.

در حالتی که برای محاسبه فاصله بین دو نقطه تنها یک نرم l_p در صفحه وجود دارد روشهایی برای حل مسائل فوق وجود دارد که در [4] آمده است. پارلر [6] به حالت خاصی در فضای R^2 که در طرفین خط $x = \alpha$ ، نرمهای l_1 و l_2 وجود دارند توجه کرد و مساله را به صورت یک مساله برنامه ریزی صفر و یک مدل کرد. در این حالت بریمبرگ و همکاران [2,3] نشان داده‌اند که کوتاهترین مسیر از نقطه A در فضای با نرم l_1 ، به نقطه D در فضای با نرم l_2 از طریق نقطه C که تصویر A بر خط $x = \alpha$ است، می‌گذرد. آنها همچنین روشهایی برای حل مساله \min در این حالت ارائه داده‌اند. وقتی خط به صورت مایل باشد زعفرانیه و همکاران [9] روشی برای محاسبه کوتاهترین مسیر بین دو نقطه در دو طرف خط ارائه کرده‌اند و روش BSSS را برای حل مساله مکانیابی به کار برده‌اند. باتا و پالکار [1] در حالتی که قسمتی از ناحیه به صورت شبکه و قسمت دیگر دارای نرم خطی است روشی برای حل مساله P-میانه ارائه کرده‌اند. از کاربردهای این مساله می‌توان به مکانیابی مراکز

سرویس دهی مختلفی مانند اوژانس؛ آتش نشانی و پلیس در مناطقی که قسمتی از آن در ناحیه شهری و قسمتی در خارج ناحیه شهری است اشاره کرد.

در این طرح هدف بررسی مسائل مکانیابی minisum و minimax روی نواحی با نرمهای l_1 ، l_p و بلاکی است که روشهایی برای حل آنها ارائه می کنیم.

2 - کوتاهترین مسیر بین دو نقطه

فرض کنید صفحه $e_i^T x = \alpha$ فضای R^n را به دو ناحیه با نرمهای l_1 و l_p تقسیم کرده‌اند و χ مجموعه کلیه نقاط داده شده در این فضا باشد، فضای با نرم l_1 را S_1 و فضای با نرم l_p را S_2 می‌نامیم، همچنین تعریف می کنیم: $J_1 = \{i | a_i \in S_1\}$ و $J_2 = \{i | a_i \in S_2\}$. قضیه زیر در این حالت برقرار است.

قضیه 1: اگر در فضای R^n در دو طرف صفحه $x_i = \alpha$ دو نرم متفاوت یکی l_1 و دیگری l_p داشته باشیم آنگاه کمترین فاصله بین دو نقطه یکی در فضای با نرم l_1 و با مختصات $A = (x_1, \dots, x_n)$ و دیگری در فضای با نرم l_p و با مختصات $D = (y_1, \dots, y_n)$ برابر است با مجموع فاصله بین نقطه واقع در فضای با نرم l_1 یعنی A و تصویر آن بر صفحه $x_i = \alpha$ بعلاوه فاصله تصویر A و نقطه واقع در فضای با نرم l_p یعنی D .

اثبات: فرض کنید تصویر نقطه A بر روی صفحه $x_i = \alpha$ نقطه $B = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$ باشد. به برهان خلف فرض کنید که فاصله از طریق این نقطه کمترین مقدار نباشد، بنابراین نقطه دیگری مانند $C = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}, \alpha, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_n)$ بر روی صفحه $x_i = \alpha$ وجود دارد که فاصله از طریق آن کمترین مقدار است، اکنون ثابت می‌کنیم که

$$\|A - B\|_1 + \|B - D\|_p \leq \|A - C\|_1 + \|C - D\|_p$$

که در آن $B = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_n)$

برای اثبات داریم:

$$\begin{aligned} \|A - B\|_1 + \|B - D\|_p &= |x_i - \alpha| + (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_{i-1} - y_{i-1}|^p + |\alpha - y_i|^p + |x_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= |x_i - \alpha| + (|x_1 - \hat{x}_1 + \hat{x}_1 - y_1|^p + \dots + |x_{i-1} - \hat{x}_{i-1} + \hat{x}_{i-1} - y_{i-1}|^p + |\alpha - y_i|^p \\ &\quad + |x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} + \hat{x}_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |x_n - \hat{x}_n + \hat{x}_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

حال فرض کنید

$$\begin{aligned} a &= (x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_{i-1} - \hat{x}_{i-1}, 0, x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_n - \hat{x}_n) \\ b &= (\hat{x}_1 - y_1, \dots, \hat{x}_{i-1} - y_{i-1}, \alpha - y_i, \hat{x}_{i+1} - y_{i+1}, \dots, \hat{x}_n - y_n) \end{aligned}$$

در این صورت چون برای هر نرم دلخواه داریم $\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$ (نامساوی مثلث) بنابراین

$$\begin{aligned} &|x_i - \alpha| + (|x_1 - \hat{x}_1 + \hat{x}_1 - y_1|^p + \dots + |x_{i-1} - \hat{x}_{i-1} + \hat{x}_{i-1} - y_{i-1}|^p + |\alpha - y_i|^p \\ &+ |x_{i+1} - \hat{x}_{i+1} + \hat{x}_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |x_n - \hat{x}_n + \hat{x}_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq |x_i - \alpha| + (|x_1 - \hat{x}_1|^p + \dots + |x_{i-1} - \hat{x}_{i-1}|^p + \\ &|x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}|^p + \dots + |x_n - \hat{x}_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (|\hat{x}_1 - y_1|^p + \dots + |\hat{x}_{i-1} - y_{i-1}|^p + |\alpha - y_i|^p + |\hat{x}_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |\hat{x}_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |x_i - \alpha| + (|x_1 - \hat{x}_1| + \dots + |x_{i-1} - \hat{x}_{i-1}| + |x_{i+1} - \hat{x}_{i+1}| + \dots + |x_n - \hat{x}_n|) + (|\hat{x}_1 - y_1|^p + \dots + |\hat{x}_{i-1} - y_{i-1}|^p + |\alpha - y_i|^p + \\ &|\hat{x}_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |\hat{x}_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \|A - C\|_1 + \|C - D\|_p \end{aligned}$$

و بنابراین فرض خلف باطل است و در نتیجه مسیر عمود کمترین فاصله را بدست می‌دهد.

3- نرمهای بلاکی

اکنون حالت دیگری را بررسی می‌کنیم که نقاط در فضای R^2 قرار دارند و در طرفین خط $x = \alpha$

نرمهای l_1 و بلاکی وجود دارند. نرمهای بلاکی دارای دایره یکانی به صورت یک چندوجهی هستند و

اولین بار توسط وارد و وندل [7,8] در مسائل مکان‌یابی بکار برده شدند. آنها نشان دادند که یک نرم

بلاکی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\|x\|_B = \min \left\{ \sum_{g=1}^r |\beta_g| \mid x = \sum_{g=1}^r \beta_g b_g \right\}$$

که در آن نقاط b_g ، نقاط راسی چندوجهی متناظر با دیسک واحد (کانتور) نرم مربوطه است. همچنین $\|x\|_B$ را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$\|x\|_B = \max\{xb_g^0 : g = 1, \dots, r_0\}$$

که b_g^0 نقاط راسی دیسک واحد مجموعه $B^0 = \{v^* \mid vv^* \leq 1 \quad \forall v \in B\}$ و B دیسک واحد نرم بلاکی است.

مشابه حالت قبل فرض کنید S_1 فضای با نرم l_1 و S_2 فضای با نرم بلاکی باشد و J_1 و J_2 مانند قبل تعریف شده باشند در این صورت قضیه زیر را داریم.

قضیه 2: اگر در فضای R^2 دو طرف صفحه $x = \alpha$ دو نرم متفاوت یکی l_1 و دیگری یک بلاک نرم داشته باشیم آنگاه کمترین فاصله بین دو نقطه یکی در فضای با نرم l_1 و به مختصات $A = (x_1, y_1)$ و دیگری در فضای با نرم بلاکی و به مختصات $D = (x_2, y_2)$ برابر است با مجموعه فاصله بین نقطه واقع در فضای با نرم l_1 یعنی A و تصویر آن بر صفحه $x_i = \alpha$ بعلاوه فاصله تصویر A و نقطه واقع در فضای با نرم بلاکی یعنی D .

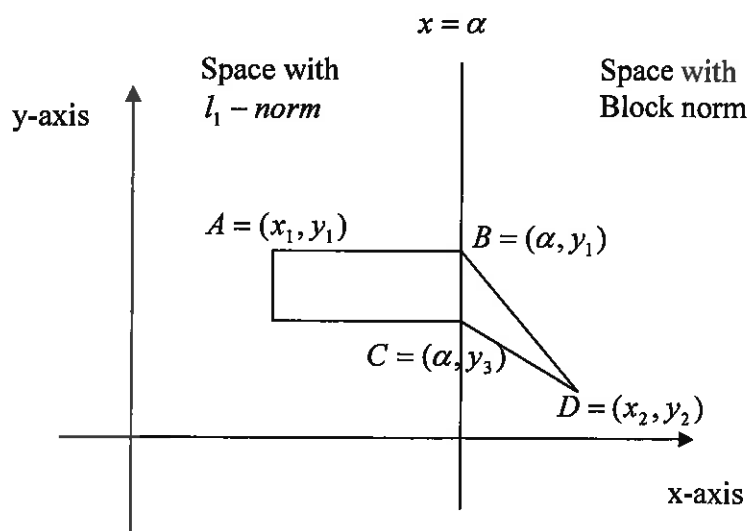
اثبات: با برهان خلف فرض کنیم مسیر از طریق $B = (\alpha, y_1)$ کمترین مقدار ممکن نباشد در این صورت مسیر از طریق نقطه دیگری مانند $C = (\alpha, y_3)$ کمترین مقدار ممکن خواهد بود اما می‌دانیم برای هر نرمی نامساوی مثلثی برقرار است. اکنون با استفاده از این خاصیت اثبات می‌کنیم که

$$\|A - B\|_1 + \|B - D\|_B \leq \|A - C\|_1 + \|C - D\|_B.$$

چون بر روی خط $x = \alpha$ فاصله دو نقطه در دو نرم متفاوت با هم مساوی هستند بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \|A - C\|_1 + \|C - D\|_B &= \|A - B\|_1 + \|B - C\|_1 + \|C - D\|_B = \|A - B\|_1 + \|B - C\|_B + \|C - D\|_B \\ &\geq \|A - B\|_1 + \|B - D\|_B \end{aligned}$$

و لذا برهان خلف باطل است و بنابراین کوتاهترین فاصله بین نقطه $A = (x_1, y_1)$ و $D = (x_2, y_2)$ از تصویر عمود نقطه بر خط $x = \alpha$ بدست می‌آید و برهان تمام است. برای درک بهتر روند اثبات به شکل 1 توجه کنید.



شکل 1

4 - مسائل *minimax* و *minisum*

در این بخش مدل مسائل مکانیابی تک وسیله ای *minisum* و *minimax* در صفحه را برای حالاتی که در دو طرف خط $x = \alpha$ دو ناحیه با نرمهای مختلف وجود دارد نوشته و راه حلهایی برای آنها ارائه می‌کنیم.

4-1- نرمهای l_1 و l_p

فرض کنید در طرفین خط $x = \alpha$ دو ناحیه با نرمهای l_1 و l_p قرار داشته باشند.

ابتدا فرض کنید جواب بهینه مساله در ناحیه با نرم l_p باشد یعنی $x \in S_2$. در این حالت مدل

مساله minisum به صورت زیر خواهد بود:

$$\min z = \sum_{i \in J_2} w_i [|x_1 - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} + \sum_{i \in J_1} w_i |\alpha - a_{i1}| + \sum_{i \in J_1} w_i [|x_1 - \alpha|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}$$

برای حل مساله فوق کافی است مساله زیر را حل کنیم که همان مساله minisum با نرم l_p است.

$$P_3: \quad \min z = \sum_{i \in J_1 \cup J_2} w_i [|x_1 - c_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}$$

همچنین مدل مساله minimax در این حالت به صورت زیر می باشد:

$$\min z = \max \left\{ \max_{i \in J_2} w_i [|x_1 - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}, \max_{i \in J_1} \{ w_i (|\alpha - a_{i1}| + [|x_1 - \alpha|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}) \} \right\}$$

برای حل مساله فوق کافی است مساله زیر را حل کنیم که معادل با مساله minimax با نرم

l_p است.

$$P_4: \quad \min z = \max_{i \in J_1 \cup J_2} \{ w_i [|x_1 - c_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} + k_i \}$$

و یا

$$P'_4: \quad \min z \\ \text{s.t.}$$

$$w_i [|x_1 - c_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} + k_i \leq z \quad i \in J_1 \cup J_2$$

حال فرض کنید جواب بهینه مساله در ناحیه با نرم l_1 قرار داشته باشد یعنی $x \in S_1$. در این حالت برای مساله **minisum** خواهیم داشت:

$$P_5: \min z = \sum_{i \in J_1} w_i [|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|] + \sum_{i \in J_2} w_i |x_1 - \alpha| + \sum_{i \in J_2} w_i [|\alpha - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}$$

برای حل مساله فوق کافی است دو مساله زیر را حل کنیم.

$$P_{5.1}: \min z_1 = \sum_{i \in J_1} w_i |x_1 - a_{i1}| + \sum_{i \in J_2} w_i |x_1 - \alpha|$$

$$P_{5.2}: \min z_2 = \sum_{i \in J_1} w_i |x_2 - a_{i2}| + \sum_{i \in J_2} w_i [|\alpha - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}$$

مساله $P_{5.1}$ همان مساله **minisum** با نرم l_1 است.

در مساله **minimax** داریم:

$$P_6: \min z = \max \left\{ \max_{i \in J_1} w_i (|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|), \max_{i \in J_2} w_i (|x_1 - \alpha| + [|\alpha - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}) \right\}$$

مساله فوق را میتوان به صورت زیر را نوشت

$$P'_6: \min z$$

s.t.

$$w_i (y_1 + y_2) \leq z \quad i \in J_1$$

$$x_1 - a_{i1} \leq y_1 \quad i \in J_1$$

$$-x_1 + a_{i1} \leq y_1 \quad i \in J_1$$

$$x_2 - a_{i2} \leq y_2 \quad i \in J_1$$

$$-x_2 + a_{i2} \leq y_2 \quad i \in J_1$$

$$x_1 - \alpha \leq y_3 \quad i \in J_2$$

$$-x_1 + \alpha \leq y_3 \quad i \in J_2$$

$$w_i ([|\alpha - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} + y_3) \leq z \quad i \in J_2$$

مساله P'_6 یک مساله برنامه ریزی است که دارای $|J_2|$ قید غیرخطی است.

4-2- نرمهای l_1 و بلاکی

فرض کنید دو ناحیه با نرمهای l_1 و بلاکی در طرفین خط $x = \alpha$ قرار داشته باشند. و a'_i تصویر

نقطه a روی خط $x = \alpha$ باشد.

مانند قبل اگر جواب بهینه در ناحیه با نرم بلاکی قرار داشته باشد یعنی $x \in S_2$ نگاه مدل مسائل

minisum و minimax به ترتیب به صورتهای زیر خواهند بود:

$$P_7: \min z = \sum_{i \in J_1} w_i |\alpha - a_{i1}| + \sum_{i \in J_1} w_i \|x - a'_i\|_B + \sum_{i \in J_2} w_i \|x - a_i\|_B$$

9

$$P_8: \min z = \max \{ \max_{i \in J_2} w_i \|x - a_i\|_B, \max_{i \in J_1} w_i (|\alpha - a_{i1}| + \|x - a'_i\|_B) \}$$

با توجه به اینکه $|\alpha - a_{i1}|$ مقدار ثابتی است هر دو مساله فوق به مسائلی با تنها یک نوع نرم بلاکی

تبدیل می شوند که می توان برای آنها مدل برنامه ریزی خطی نوشت (به [7,8] مراجعه کنید).

همچنین اگر جواب بهینه در ناحیه با نرم l_1 قرار داشته باشد یعنی $x \in S_1$ و x' تصویر x روی خط

$x = \alpha$ باشد. نگاه مدل مسائل minisum و minimax به ترتیب عبارت خواهند بود از:

$$P_9: \min z = \sum_{i \in J_1} w_i [|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|] + \sum_{i \in J_2} w_i (\|x' - a_i\|_B + |x_1 - \alpha|)$$

$$P_{10}: \min z = \max \{ \max_{i \in J_1} w_i (|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|), \max_{i \in J_2} w_i (|x_1 - \alpha| + \|x' - a_i\|_B) \}$$

با توجه به اینکه مؤلفه اول x' ثابت و برابر α است بنابراین برای حل مساله P_9 کافی است مساله

$P_{5.1}$ و مساله زیر را حل کنیم.

$$P_{9.2}: \min z_2 = \sum_{i \in J_1} w_i |x_2 - a_{i2}| + \sum_{i \in J_2} w_i \|x' - a_i\|_B$$

مساله P_{10} را می توان به صورت زیر نوشت

$$P'_{10}: \min z$$

$$\begin{aligned}
& \text{s.t.} \\
& w_i (y_1 + y_2) \leq z \quad i \in J_1 \\
& x_1 - a_{i1} \leq y_1 \quad i \in J_1 \\
& -x_1 + a_{i1} \leq y_1 \quad i \in J_1 \\
& x_2 - a_{i2} \leq y_2 \quad i \in J_1 \\
& -x_2 + a_{i2} \leq y_2 \quad i \in J_1 \\
& x_1 - \alpha \leq y_3 \quad i \in J_2 \\
& -x_1 + \alpha \leq y_3 \quad i \in J_2 \\
& w_i (\|x' - a_i\|_B + y_3) \leq z \quad i \in J_2
\end{aligned}$$

مسائل $P_{9.2}$ و P'_{10} را می توان به مدل های برنامه ریزی خطی تبدیل کرد.

3-4- دو نوع نرم بلاکی

فرض کنید در طرفین خط $x = \alpha$ دو ناحیه با نرم های بلاکی B_1 و B_2 قرار داشته باشند. بدون آنکه به کلیت مساله خللی وارد شود فرض کنید $x \in S_1$. به ازای هر $a_i \in S_2$ فرض کنید $z_i = (\alpha, z_{i2})$ نقطه ای روی خط $x = \alpha$ باشد که کوتاهترین مسیر بین x و a_i از z_i می گذرد. در این حالت مدل مسائل minisum و minimax به صورتهای زیر می باشند.

$$P_{11}: \min z = \sum_{i \in J_1} w_i \|x - a_i\|_{B_1} + \sum_{i \in J_2} w_i (\|z_i - a_i\|_{B_2} + \|x - z_i\|_{B_1})$$

$$P_{12}: \min z = \max \left\{ \max_{i \in J_1} w_i \|x - a_i\|_{B_1}, \max_{i \in J_2} w_i (\|z_i - a_i\|_{B_2} + \|x - z_i\|_{B_1}) \right\}$$

حال با استفاده از شکل خاص نرم های بلاکی اگر قرار دهیم:

$$y_i = \|x - a_i\|_{B_1} = \max\{|(x - a_i)b_{g_1}^0| : g_1 = 1, \dots, r_1^0\}$$

$$y'_i = \|z_i - a_i\|_{B_2} = \max\{|(z_i - a_i)b_{g_2}^0| : g_2 = 1, \dots, r_2^0\}$$

$$y''_i = \|x - z_i\|_{B_1} = \max\{|(x - z_i)b_{g_1}^0| : g_1 = 1, \dots, r_1^0\}$$

آنگاه دو مدل برنامه ریزی خطی زیر را برای دو مساله ذکر شده خواهیم داشت:

$$P'_{11}: \min z = \sum_{i \in J_1} w_i y_i + \sum_{i \in J_2} w_i (y'_i + y''_i)$$

s.t.

$$(x - a_i) b_{g_1}^0 \leq y_i \quad i \in J_1, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$-(x - a_i) b_{g_1}^0 \leq y_i \quad i \in J_1, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$(z_i - a_i) b_{g_2}^0 \leq y'_i \quad i \in J_2, g_2 = 1, \dots, r_2^0$$

$$-(z_i - a_i) b_{g_2}^0 \leq y'_i \quad i \in J_2, g_2 = 1, \dots, r_2^0$$

$$(z_i - x) b_{g_1}^0 \leq y''_i \quad i \in J_2, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$-(z_i - x) b_{g_1}^0 \leq y''_i \quad i \in J_2, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

9

$$P'_{12}: \min z$$

s.t.

$$w_i(x - a_i) b_{g_1}^0 \leq z \quad i \in J_1, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$-w_i(x - a_i) b_{g_1}^0 \leq z \quad i \in J_1, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$w_i(y'_i - y''_i) \leq z \quad i \in J_2$$

$$(z_i - a_i) b_{g_2}^0 \leq y'_i \quad i \in J_2, g_2 = 1, \dots, r_2^0$$

$$-(z_i - a_i) b_{g_2}^0 \leq y'_i \quad i \in J_2, g_2 = 1, \dots, r_2^0$$

$$(z_i - x) b_{g_1}^0 \leq y''_i \quad i \in J_2, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$-(z_i - x) b_{g_1}^0 \leq y''_i \quad i \in J_2, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

5 - شرط کافی بهینگی

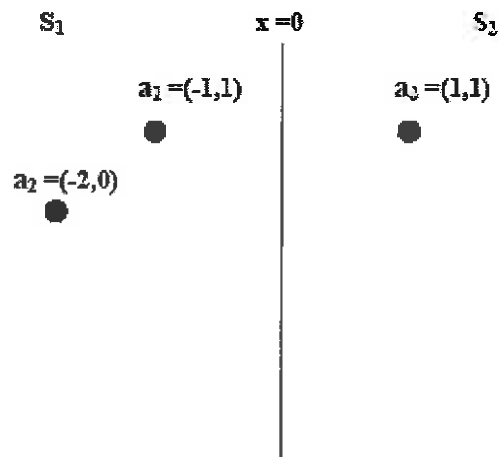
توجه داشته باشید که در حالت کلی ما نمی دانیم جواب در کدام ناحیه S_1 یا S_2 قرار دارد و برای حل مساله باید هر دو حالت را بررسی کرده و جواب بهینه را از بین آنها به دست آوریم. برای مساله minisum در حالت خاصی که در قضیه زیر آمده است کافی است تنها فضای S_2 را بررسی کنیم.

قضیه 3: فرض کنید S_1 فضای با نرم l_1 و S_2 فضای با نرم l_p یا بلاکی باشد و J_1 و J_2 به صورتی که در بخش 2 تعریف شد باشند و $W_1 = \sum_{i \in J_1} w_i$ و $W_2 = \sum_{i \in J_2} w_i$. اگر $W_2 \geq W_1$ آنگاه جواب بهینه مساله minisum در فضای S_2 یا روی خط $x=\alpha$ قرار دارد.

اثبات: اگر جواب بهینه در ناحیه S_2 نباشد، آنگاه از حل مساله $P_{S,1}$ داریم $x_1=\alpha$ یعنی جواب بهینه مساله minisum روی خط $x=\alpha$ قرار دارد.

6 - نتایج محاسباتی

در این بخش مثالهایی برای مسائل ذکر شده ارائه می کنیم. فرض کنید نقاط موجود در صفحه به صورتی که در شکل 2 نشان داده شده است باشند و فضای S_1 دارای نرم l_1 باشد. فرض کنید وزن نقاط a_1 و a_2 ثابت و برابر مقدار یک باشد. در مثالهای زیر حالات مختلفی که فضای S_2 دارای نرمهای بلوکی و l_p است به ازای $w_3=1, 1.5, 2$ مورد بررسی قرار می دهیم. توجه کنید که در حالتیکه $w_3=2$ وزن نقاط در شرایط قضیه 3 صدق می کند و جواب در ناحیه S_2 است که مثالها نیز این مطلب را تأیید می کنند.



مثال 1: فرض کنید S_2 دارای نرم l_p باشد. دو حالت را در نظر می گیریم:

الف) اگر جواب در ناحیه S_1 باشد آنگاه به ازای تمام حالات $w_3=1, 1.5, 2$ و $p=2, 3, 10, 100, \infty$ مقدار تابع هدف برای این حالت که با Z_1 نشان داده می شود در جدول 1 آمده است.

w_3	$p = 2, 3, 10, 100, \infty$		
	Z_{11}	Z_{12}	$Z_1 = Z_{11} + Z_{12}$
1	2	2	4
1.5	2.5	2.5	5
2	3	3	6

جدول 1

Z_{11} و Z_{12} به ترتیب جوابهای مسائل زیر هستند.

$$\min z_{11} = |x_1 + 1| + |x_1 + 2| + w_3|x_1|$$

$$\min z_{12} = |x_2 - 1| + |x_2| + w_3[1 + |x_2 - 1|^p]^{\frac{1}{p}}$$

(ب) اگر جواب در ناحیه S_2 باشد آنگاه مساله زیر باید حل شود:

$$\min z_2 = [x_1^p + x_2^p]^{\frac{1}{p}} + [x_1^p + |x_2 - 1|^p]^{\frac{1}{p}} + w_3[|x_1 - 1|^p + |x_2 - 1|^p]^{\frac{1}{p}} + 3$$

جدول 2 جواب این مساله را به ازای مقادیر مختلف نشان می دهد.

p	$w_3 = 1$			$w_3 = 1.5$			$w_3 = 2$		
	x_1	x_2	z_2	x_1	x_2	z_2	x_1	x_2	z_2
2	0.2113	0.7887	4.9319	0.4586	0.8122	5.2879	1	1	5.4142
3	0.3547	0.6453	4.8053	0.5074	0.6975	5.1105	1	1	5.2599
10	0.4690	0.5310	4.5920	0.5062	0.5522	4.8560	1	1	5.0718
100	0.4950	0.5005	4.5096	0.5	0.5	4.76220	1	1	5.0070
∞	0.5	0.5	4.5	0.5	0.5	4.75	1	1	5

جدول 2

حال برای بدست آوردن جواب بهینه باید در دو حالت (الف) و (ب) جوابی که کمترین مقدار است

انتخاب شود. جدول 3 جواب بهینه را به ازای مقادیر مختلف p و w_3 نشان می دهد. توجه کنید که در

حالت $w_3=2$ همانطور که انتظار داشتیم جواب بهینه در ناحیه S_2 قرار دارد.

p	$w_3 = 1$			$w_3 = 1.5$			$w_3 = 2$		
	x_1^*	x_2^*	z^*	x_1^*	x_2^*	z^*	x_1^*	x_2^*	z^*
2	-1	1	4	-1	1	5	1	1	5.4142
3	-1	1	4	-1	1	5	1	1	5.2599
10	-1	1	4	0.5062	0.5522	4.8560	1	1	5.0718
100	-1	1	4	0.5	0.5	4.76220	1	1	5.0070
∞	-1	1	4	0.5	0.5	4.75	1	1	5

جدول 3

مثال 2: فرض کنید S_2 دارای نرم بلاکی با نقاط راسی به صورت زیر باشد.

$$b_1 = (0, 1), b_2 = (\sqrt{3}/2, 1/2), b_3 = (1, 0), b_4 = (\sqrt{3}/2, -1/2),$$

$$b_{-1} = (0, -1), b_{-2} = (-\sqrt{3}/2, -1/2), b_{-3} = (-1, 0),$$

$$b_{-4} = (-\sqrt{3}/2, 1/2).$$

در این حالت نتایج حاصل از حل مسائل مربوطه در جدول 4 آمده است. در این حالت نیز به ازای $w_3=2$ جواب بهینه در ناحیه S_2 است.

w_3	$x \in S_1$				$x \in S_2$			x^*		
	x_1	x_{11}	x_2	x_{12}	x_1	x_2	x_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*
1	-1	2	1	2	0	1	5	-1	1	4
1.5	-1	2.5	1	2.5	0.5	0.7113	5.4338	-1	1	5
2	-1	3	1	3	1	1	5.5774	1	1	5.5774

جدول 4

مراجع

- [1] Batta R. and Palekar S. (1988), "Mixed planar/network facility location problem." *Computer and Operations Research*, 15: 61-67.
- [2] Brimberg J., H. T. Kakhki and G.O. Wesolowsky (2002), "Location among regions with varying norms." *Annals of Operations Research*, 122: 87-102.
- [3] Brimberg J., H.T. Kakhki, G.O. Wesolowsky (2005), "Locating a single facility in the plane in the presence of a bounded region and different norms." *Journal of the Operational Research Society of Japan* 48: 135-147.
- [4] Brimberg J. and R. F. Love (1992), "Local convergence in generalized Fermat-Weber problem." *Annals of Operations Research*, 40: 33-66.
- [5] Francis R.L., Jr. L.F. McGinnis, J.A. White (1992), *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*, second ed. Prentice-Hall.
- [6] Parlar M. (1994), "Single facility location problem with region-dependent distance metrics." *International Journal of System Science* 25: 513-525.
- [7] Ward E. and R. E. Wendell (1985), "A new norm for measuring distance which yields linear location models." *Operations Research* 28: 836-844.

- [8] Ward E. and R. E. Wendell (1985), "Using block norms for location modeling." *Operations Research* 33: 1074-1090.
- [9] Zaferanieh M., H. Taghizadeh Kakhki, J. Brimberg, G.O. Wesolowsky (2008), "A BSSS algorithm for the single facility location problem in two regions with different norms." *European Journal of Operational Research* 190: 79–89.

Elsevier Editorial System(tm) for European Journal of Operational Research

Manuscript Draft

Manuscript Number:

Title: Location problems on the regions with lp and block norms

Article Type: Regular Paper

Section/Category: Location

Keywords: Location, single facility, block norms, optimization

Corresponding Author: Jafar Fathali,

Corresponding Author's Institution:

First Author: Jafar Fathali

Order of Authors: Jafar Fathali; Mehdi Zafarani

Manuscript Region of Origin:

Abstract: In this paper we consider the minimax and minimum single facility location problems on the regions with varying norms on different sides of a line. We investigate three special cases where in each sides of the line we have l_1 and l_p norms, l_1 and block norms and two block norms. For each case we propose an efficient solution procedures.

Location problems on the regions with l_p and block norms

Jafar Fathali¹ and Mehdi Zafarani²

¹Department of Mathematics, Shahrood University of Technology,
University Blvd., Shahrood, Iran
email: fathali@shahrood.ac.ir

²Department of Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad,
Vakil Abad Blvd., Mashhad, Iran 91775-1159
email: me.za34@stu-mail.um.ac.ir

Abstract

In this paper we consider the minimax and minisum single facility location problems on the regions with varying norms on different sides of a line. We investigate three special cases where in each sides of the line we have l_1 and l_p norms, l_1 and block norms and two block norms. For each case we propose an efficient solution procedures.

Keywords: continuous location, single facility, block norms, optimization

1 Introduction

The minisum and minimax facility location problems are two important problems in the location theory. In the single facility case of minisum and minimax problems we want to find a point x such that respectively the sum of distances from x to all given points and the maximum distances from x to the given points is minimized. Let $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ for $i = 1, \dots, m$ be the demand points in R^n and w_i be a positive constant corresponding to each a_i . The minisum and minimax single facility location problems under a given norm $\|\cdot\|$, respectively can be written as follows:

$$\min z = \sum_{i=1}^m w_i \|x - a_i\| \quad (P_1)$$

and

$$\min z = \max_{i=1, \dots, m} w_i \|x - a_i\|. \quad (P_2)$$

In this paper we consider these problems in R^2 where two regions with different norms exist in two sides of a straight line. In each side l_1 , l_p and block norms are considered.

Parlar [5] studied the minimum problem for the case of Euclidean distances on one side and rectilinear distances on the other side of a line. He formulates the problem as a mixed integer problem and proposed modified Weiszfeld procedure to solve the problem. Brimberg et al. [2] also consider this case of minimum problem and extension of the problem where there exist more than two regions with different norms. They show that the shortest path between two points s and t in the regions with l_1 and l_2 , respectively, passes through the projection of t onto the line L . Batta and Palekar [1] analyze the p -median problem in a region where in some parts there exist network structure and in some other parts there exist rectilinear structure.

In what follows, in Section 2 we show a property of the shortest path between two points in two sides of a line, where there exist different norms in the regions of each side of the line. Some solution procedures for some special cases are proposed in Section 3. Section 4 contains a summary and conclusions.

2 Shortest path between two points

In this section we state a property of shortest path between two points in two sides of a hyperplane. Suppose R^n is divided into two regions S_1 and S_2 by the hyperplane $e_i^T x = \alpha$, where e_i^T is unit vector.

If the distance measure in S_1 is l_1 and the distance measure in S_2 is l_p then we can state following property which is the generalization of the case that Brimberg et al. [2] have proved:

Lemma 2.1. *Let $A = (x_1, \dots, x_m) \in S_1$ and $D = (y_1, \dots, y_m) \in S_2$ be two arbitrary points. The shortest path from A to D passes through the point*

$B = (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_m)$, projection of A onto hyperplane $H = \{x : e_i^T x = \alpha\}$.

Proof Let $C = (x'_1, \dots, x'_{i-1}, \alpha, x'_{i+1}, \dots, x'_m)$, ($C \neq B$) be any point on the hyperplane H . We show

$$\|A - B\|_1 + \|B - D\|_p \leq \|A - C\|_1 + \|C - D\|_p. \quad (1)$$

To show inequality 1, by definition of l_p norms we have,

$$\begin{aligned} \|A - B\|_1 + \|B - D\|_p &= |x_i - \alpha| + (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_{i-1} - y_{i-1}|^p \\ &\quad + |\alpha - y_i|^p + |x_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |x_m - y_m|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= |x_i - \alpha| + (|x_1 - x'_1 + x'_1 - y_1|^p + \dots + |x_{i-1} - x'_{i-1} + x'_{i-1} - y_{i-1}|^p \\ &\quad + |\alpha - y_i|^p + |x_{i+1} - x'_{i+1} + x'_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |x_m - x'_m + x'_m - y_m|^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

and using triangle inequality,

$$\begin{aligned} \|A - B\|_1 + \|B - D\|_p &\leq |x_i - \alpha| + (|x_1 - x'_1|^p + \dots + |x_{i-1} - x'_{i-1}|^p \\ &\quad + |x_{i+1} - x'_{i+1}|^p + \dots + |x_m - x'_m|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + (|x'_1 - y_1|^p + \dots + |x'_{i-1} - y_{i-1}|^p + |\alpha - y_i|^p + |x'_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |x'_m - y_m|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |x_i - \alpha| + (|x_1 - x'_1| + \dots + |x_{i-1} - x'_{i-1}| + |x_{i+1} - x'_{i+1}| + \dots + |x_m - x'_m|) \\ &\quad + (|x'_1 - y_1|^p + \dots + |x'_{i-1} - y_{i-1}|^p + |\alpha - y_i|^p + |x'_{i+1} - y_{i+1}|^p + \dots + |x'_m - y_m|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|A - C\|_1 + \|C - D\|_p \end{aligned}$$

which completes the proof. \square

Now consider the case that the distance measure in S_1 is l_1 and the distance measure in S_2 is a block norm B and the space is R^2 .

The block norms are norms whose contours are polytopes. These norms first time are used to solve location problems by Ward and Wendell [6, 7]. They showed a block norm can be characterized as follows:

$$\|x\|_B = \min \left\{ \sum_{g=1}^r |\lambda_g| : x = \sum_{g=1}^r \lambda_g b_g \right\} \quad (2)$$

where the points b_g and $-b_g$ with $g = 1, \dots, r$ form the extreme points of the polytope corresponding to the unit contour. They also presented another

characterization based on polar set for block norms. This characterization follows:

$$\|x\|_B = \max\{|xb_g^0| : g = 1, \dots, r^0\} \quad (3)$$

where b_g^0 and $-b_g^0$ with $g = 1, \dots, r^0$ are extreme points of the polar set $B^0 = \{v : b_g v \leq 1 \text{ for all } g = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm r\}$.

Definition 2.2. Let v be a vector in R^2 . If B is a block norm satisfies in the following conditions:

1. $\sum_{g=1}^r \lambda_g b_g = v$
2. $\sum_{g=1}^r \lambda_g = 1$

then B is a v -block norm.

In the special case if $v = e_2 = (0, 1)$ then the point $(0, 1)$ is on the contour of any e_2 -block norm (see figure 1). Furthermore the distances between any two points on the vertical axis is the same under any e_2 -block norm. For example l_1 and l_∞ are e_2 -block norms.

Figure1.

Lemma 2.3. Let R^2 be divided into two regions S_1 and S_2 by the line $L = \{x : x = \alpha\}$ and the distance measure in S_1 is l_1 and the distance measure in S_2 is an e_2 -block norm B . Also let $A \in S_1$ and $D \in S_2$ be two arbitrary points. Then the shortest path from A to D passes through the point E , projection of A onto line L .

Proof Similar to proof of lemma 2.1, let $C \neq E$ be any point on the line L . We need to show

$$\|A - E\|_1 + \|E - D\|_B \leq \|A - C\|_1 + \|C - D\|_B. \quad (4)$$

But, using triangle inequality we have

$$\|A - E\|_1 + \|E - D\|_B \leq \|A - E\|_1 + \|E - C\|_B + \|C - D\|_B$$

and since l_1 is an e_2 -block norm and the distance between any two points on the line L by measurement of any e_2 -block norms is the same. So,

$$\|A - E\|_1 + \|E - C\|_1 + \|C - D\|_B = \|A - C\|_1 + \|C - D\|_B$$

which completes the proof. \square

3 Minisum and minimax problems

In this section we consider the single facility minisum and minimax location problems on a plane where there are different norms in two sides of the line $L = \{x : x = \alpha\}$. Let m points a_1, \dots, a_m in R^2 with known weights be given. We define $J_1 = \{i | a_i \in S_1\}$ and $J_2 = \{i | a_i \in S_2\}$.

3.1 l_1 and l_p norms

Let S_1 and S_2 are two regions in two sides of L with norms l_1 and l_p , respectively. We consider two different cases, $x^* \in S_1$ and $x^* \in S_2$ (see figure 2).

Figure 2.

First suppose the optimal solution, x^* , is in S_2 . Using lemma 2.1 the minisum problem, can be written as:

$$\min z = \sum_{i \in J_2} w_i [|x_1 - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} + \sum_{i \in J_1} w_i |\alpha - a_{i1}| + \sum_{i \in J_1} w_i [|x_1 - \alpha|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}$$

or

$$\min z = \sum_{i \in J_1 \cup J_2} w_i [|x_1 - c_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} + K \quad (P_3)$$

which is a single facility minisum problem with l_p norm. Problem P_3 can be solved by modified Weiszfeld method (see [3]). c_{i1} and K are appropriately defined.

Similarly, the single facility minimax problem follows:

$$\min z = \max\left\{\max_{i \in J_2} w_i [|x_1 - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}}, \max_{i \in J_1} w_i (|\alpha - a_{i1}| + [|x_1 - \alpha|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}})\right\}$$

to solve this problem we need to solve the following minimax problem with l_p norm.

$$\min z = \max_{i \in J_1 \cup J_2} w_i [|x_1 - c_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} + K_i \quad (P_4)$$

or

$$\min z \quad (P'_4)$$

s.t.

$$w_i [|x_1 - c_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} + K_i \leq z \quad i \in J_1 \cup J_2$$

Now consider the case that the optimal solution, x^* , is in S_1 . Then for minisum problem we have the following formulation:

$$\min z = \sum_{i \in J_1} w_i [|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|] + \sum_{i \in J_2} w_i |x_1 - \alpha| + \sum_{i \in J_2} w_i [|\alpha - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} \quad (P_5)$$

But to solve P_5 it's enough to solve the two following problems:

$$\min z_1 = \sum_{i \in J_1} w_i |x_1 - a_{i1}| + \sum_{i \in J_2} w_i |x_1 - \alpha| \quad (P_{5.1})$$

and

$$\min z_2 = \sum_{i \in J_1} w_i |x_2 - a_{i2}| + \sum_{i \in J_2} w_i [|\alpha - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}} \quad (P_{5.2})$$

$P_{5.1}$ is minisum problem with rectilinear norm which can easily be solved (see e.g. [4]).

In this case the minimax problem is as:

$$\min z = \max\left\{\max_{i \in J_1} w_i [|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|], \max_{i \in J_2} w_i (|x_1 - \alpha| + [|\alpha - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p]^{\frac{1}{p}})\right\}$$

or

$$\min z \quad (P_6)$$

s.t.

$$w_i(y_1 + y_2) \leq z \quad i \in J_1$$

$$x_1 - a_{i1} \leq y_1 \quad i \in J_1$$

$$-x_1 + a_{i1} \leq y_1 \quad i \in J_1$$

$$x_2 - a_{i2} \leq y_2 \quad i \in J_1$$

$$-x_2 + a_{i2} \leq y_2 \quad i \in J_1$$

$$x_1 - \alpha \leq y_3 \quad i \in J_2$$

$$-x_1 + \alpha \leq y_3 \quad i \in J_2$$

$$w_i(|\alpha - a_{i1}|^p + |x_2 - a_{i2}|^p)^{\frac{1}{p}} + y_3 \leq z \quad i \in J_2$$

3.2 l_1 and e_2 -block norms

Let the norm in S_1 is l_1 and the norm in S_2 is an e_2 -block norm B . Also let a'_i is the projection of a_i on the line L .

If the optimal solution is in S_2 , then the minisum and minimax problems respectively are as:

$$\min z = \sum_{i \in J_1} w_i |\alpha - a_{i1}| + \sum_{i \in J_1} w_i \|x - a'_i\|_B + \sum_{i \in J_2} w_i \|x - a_i\|_B \quad (P_7)$$

and

$$\min z = \max \left\{ \max_{i \in J_1} w_i (|\alpha - a_{i1}| + \|x - a'_i\|_B), \max_{i \in J_2} w_i \|x - a_i\|_B \right\} \quad (P_8)$$

$|\alpha - a_{i1}|$ is a constant number, so both problems P_7 and P_8 reduce to the problems with a block norm and a linear programming can be written for them which is easy to solve (see [7]).

In the other case, if the optimal solution is in S_1 , let x' is the projection of x on the line L . Then minisum and minimax problems respectively follows:

$$\min z = \sum_{i \in J_1} w_i [|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|] + \sum_{i \in J_2} w_i (\|x' - a_i\|_B + |x_1 - \alpha|) \quad (P_9)$$

and

$$\min z = \max\left\{\max_{i \in J_1} w_i(|x_1 - a_{i1}| + |x_2 - a_{i2}|), \max_{i \in J_2} w_i(\|x' - a_i\|_B + |x_1 - \alpha|)\right\} \quad (P_{10})$$

Since $x'_1 = \alpha$ then to solve problem P_9 we can solve the problems $P_{5,1}$ and the following problem:

$$\min z = \sum_{i \in J_1} w_i |x_2 - a_{i2}| + \sum_{i \in J_2} w_i \|x' - a_i\|_B \quad (P_{9.2})$$

And problem P_{10} can be written as:

$$\min z \quad (P'_{10})$$

s.t.

$$w_i(y_1 + y_2) \leq z \quad i \in J_1$$

$$x_1 - a_{i1} \leq y_1 \quad i \in J_1$$

$$-x_1 + a_{i1} \leq y_1 \quad i \in J_1$$

$$x_2 - a_{i2} \leq y_2 \quad i \in J_1$$

$$-x_2 + a_{i2} \leq y_2 \quad i \in J_1$$

$$x_1 - \alpha \leq y_3 \quad i \in J_2$$

$$-x_1 + \alpha \leq y_3 \quad i \in J_2$$

$$w_i(\|x' - a_i\|_B + y_3) \leq z \quad i \in J_2.$$

Problems $P_{9.2}$ and P'_{10} can be solved using linear programming (see Section 3.3).

3.3 Two block norms

Let there is two regions S_1 and S_2 with block norms, B_1 and B_2 , on two sides of the line L . Without loss of generality, suppose the optimal solution, x^* is in S_1 . Let $z_i = (\alpha, z_{i2})$ be a point on the line L such that the shortest path from x^* to a_i passes through z_i , for all $i = 1, \dots, m$. The minisum and minimax problems follows:

$$\min z = \sum_{i \in J_1} w_i \|x - a_i\|_{B_1} + \sum_{i \in J_2} w_i (\|z_i - a_i\|_{B_2} + \|x - z_i\|_{B_1}) \quad (P_{11})$$

and

$$\min z = \max \left\{ \max_{i \in J_1} w_i \|x - a_i\|_{B_1}, \max_{i \in J_2} w_i (\|z_i - a_i\|_{B_2} + \|x - z_i\|_{B_1}) \right\} \quad (P_{12})$$

Using the form of block norms we set,

$$y_i = \|x - a_i\|_{B_1} = \max \{ |(x - a_i) b_{g_1}^0| : g_1 = 1, \dots, r_1^0 \}$$

$$y'_i = \|z - a_i\|_{B_2} = \max \{ |(z_i - a_i) b_{g_2}^0| : g_2 = 1, \dots, r_2^0 \}$$

$$y''_i = \|x - z_i\|_{B_1} = \max \{ |(x - z_i) b_{g_1}^0| : g_1 = 1, \dots, r_1^0 \}$$

then two following linear programming for minisum and minimax problems, respectively.

$$\min z = \sum_{i \in J_1} w_i y_i + \sum_{i \in J_2} w_i (y'_i + y''_i) \quad (P'_{11})$$

s.t.

$$(x - a_i) b_{g_1}^0 \leq y_i \quad i \in J_1, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$-(x - a_i) b_{g_1}^0 \leq y_i \quad i \in J_1, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$(z_i - a_i) b_{g_2}^0 \leq y'_i \quad i \in J_2, g_2 = 1, \dots, r_2^0$$

$$-(z_i - a_i) b_{g_2}^0 \leq y'_i \quad i \in J_2, g_2 = 1, \dots, r_2^0$$

$$(z_i - x) b_{g_1}^0 \leq y''_i \quad i \in J_2, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$-(z_i - x) b_{g_1}^0 \leq y''_i \quad i \in J_2, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

and

$$\min z \quad (P'_{12})$$

s.t.

$$w_i (x - a_i) b_{g_1}^0 \leq z \quad i \in J_1, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$-w_i (x - a_i) b_{g_1}^0 \leq z \quad i \in J_1, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$w_i (y'_i - y''_i) \leq z \quad i \in J_2$$

$$(z_i - a_i) b_{g_2}^0 \leq y'_i \quad i \in J_2, g_2 = 1, \dots, r_2^0$$

$$-(z_i - a_i) b_{g_2}^0 \leq y'_i \quad i \in J_2, g_2 = 1, \dots, r_2^0$$

$$(z_i - x) b_{g_1}^0 \leq y''_i \quad i \in J_2, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

$$-(z_i - x) b_{g_1}^0 \leq y''_i \quad i \in J_2, g_1 = 1, \dots, r_1^0$$

Problems P'_{11} and P'_{12} can be easily solved using linear programming methods.

3.4 Sufficient condition

Note that for each of considered problems we don't know if the optimal solution is in S_1 or S_2 , so we should solve the problem for each case and select the best one. In a special case we have a sufficient condition which is stated in the following lemma.

Lemma 3.1. *Let the norm in S_1 is l_1 and the norm in S_2 is l_p or e_2 -block norm and $W_1 = \sum_{i \in J_1} w_i$ and $W_2 = \sum_{i \in J_2} w_i$. If $W_2 \geq W_1$ then x^* , the optimal solution of single facility minisum problem, is in $S_2 \cup L$.*

Proof If $x^* \in S_1$ then the solution of $P_{3,1}$ implies $x_1^* = \alpha$. Thus $x^* \in S_2 \cup L$.
 \square

3.5 Examples

Let $a_1 = (-1, 1) \in S_1$, $a_2 = (-2, 0) \in S_1$ and $a_3 = (1, 1) \in S_2$ with $w_1 = w_2 = 1$ and $\alpha = 0$ (see figure 3). Let also the norm in S_1 be l_1 . We solve the minisum problem where the norm in S_2 is l_p or an e_2 -block norm and $w_3 = 1, 1.5, 2$.

Note that if $w_3 = 1$ or $w_3 = 1.5$ then the weights do not satisfy in the condition of lemma 3.1 so we should solve the problems in two cases where $x \in S_1$ and $x \in S_2$. However for $w_3 = 2$ using lemma 3.1 an optimal solution is in S_2 .

Figure 3.

Example 1. Let the region S_2 is with l_p norm. We should solve the problem in two cases.

1. If $x \in S_1$ we need to solve the following problems:

$$\min z_{11} = |x_1 + 1| + |x_1 + 2| + w_3|x_1|$$

and

$$\min z_{12} = |x_2 - 1| + |x_2| + w_3[1 + |x_2 - 1|^p]^{\frac{1}{p}}$$

We set $p = 2, 3, 10, 100, \infty$ and $w_3 = 1, 1.5, 2$. For all cases an optimal solution is $x = (-1, 1)$ and the values of the objective function is shown in the table 1.

	$p = 2, 3, 10, 100, \infty$		
w_3	z_{11}	z_{12}	$z_1 = z_{11} + z_{12}$
1	2	2	4
1.5	2.5	2.5	5
2	3	3	6

Table 1: Results for the case $x \in S_1$ in example1.

2. If $x \in S_2$ then we have the following problem:

$$\min z_2 = [x_1^p + x_2^p]^{\frac{1}{p}} + [x_1^p + |x_2 - 1|^p]^{\frac{1}{p}} + w_3[|x_1 - 1|^p + |x_2 - 1|^p]^{\frac{1}{p}} + 3$$

Table 2 contains the solutions of these problems with different values of p and w_3 . Note that in the case $p = \infty$ the points $x = (0.5, 0.5)$ and $x = (1, 1)$ both are optimal solutions in all tree cases $w_3 = 1, 1.5, 2$.

	$w_3 = 1$			$w_3 = 1.5$			$w_3 = 2$		
p	x_1	x_2	z_2	x_1	x_2	z_2	x_1	x_2	z_2
2	0.2113	0.7887	4.9319	0.4586	0.8122	5.2879	1	1	5.4142
3	0.3547	0.6453	4.8053	0.5074	0.6975	5.1105	1	1	5.2599
10	0.4690	0.5310	4.5920	0.5062	0.5522	4.8560	1	1	5.0718
100	0.4950	0.5005	4.5096	0.5	0.5	4.76220	1	1	5.0070
∞	0.5	0.5	4.5	0.5	0.5	4.75	1	1	5

Table 2: Results for the case $x \in S_2$ in example1.

Table 3 contains the optimal solutions of main problem where $z^* = \min\{z_1, z_2\}$. For the case $w_3 = 2$ the optimal solutions are in S_1 as we expect. However for the case $w_3 = 1.5$ the sum of the weights in S_1 is more than the other side but for $p = 10, 100, \infty$ the optimal solutions are in S_2 . This shows the condition in lemma 3.1 is not a necessary condition.

p	$w_3 = 1$			$w_3 = 1.5$			$w_3 = 2$		
	x_1^*	x_2^*	z^*	x_1^*	x_2^*	z^*	x_1^*	x_2^*	z^*
2	-1	1	4	-1	1	5	1	1	5.4142
3	-1	1	4	-1	1	5	1	1	5.2599
10	-1	1	4	0.5062	0.5522	4.8560	1	1	5.0718
100	-1	1	4	0.5	0.5	4.76220	1	1	5.0070
∞	-1	1	4	0.5	0.5	4.75	1	1	5

Table 3: Optimal solutions of example1.

Example 2. Let the norm in S_2 is an e_2 -block norm which extreme points of its contour are $b_1 = (0, 1)$, $b_2 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$, $b_3 = (1, 0)$, $b_4 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$, $b_{-1} = (0, -1)$, $b_{-2} = (-\sqrt{3}/2, -1/2)$, $b_{-3} = (-1, 0)$ and $b_{-4} = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$. The extreme points of its polar set are $b_1^0 = (\sqrt{3}/3, 1)$, $b_2^0 = (1, 2 - \sqrt{3})$, $b_3^0 = (1, -2 + \sqrt{3})$, $b_4^0 = (\sqrt{3}/3, -1)$, $b_{-1}^0 = (-\sqrt{3}/3, -1)$, $b_{-2}^0 = (-1, -2 + \sqrt{3})$, $b_{-3}^0 = (-1, 2 - \sqrt{3})$ and $b_{-4}^0 = (-\sqrt{3}/3, 1)$. Therefore we should solve the problem in the two following cases:

1. If $x \in S_1$ then we solve two following problems:

$$\min z_{11} = |x_1 + 1| + |x_1 + 2| + w_3|x_1|$$

and

$$\min z_{12} = |x_2 - 1| + |x_2| + w_3y$$

s.t.

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}/3 - 1 + x_2 &\leq y \\ \sqrt{3}/3 + 1 - x_2 &\leq y \\ \sqrt{3}/3 - 1 + x_2 &\leq y \\ -\sqrt{3}/3 + 1 - x_2 &\leq y \\ -1 + (x_2 - 1)(2 - \sqrt{3}) &\leq y \\ 1 - (x_2 - 1)(2 - \sqrt{3}) &\leq y \\ -1 + (x_2 - 1)(-2 + \sqrt{3}) &\leq y \\ 1 + (x_2 - 1)(-2 + \sqrt{3}) &\leq y \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

2. If $x \in S_2$ then we have the following problem:

$$\min z_2 = y_1 + y_2 + w_3 y_3 + 3$$

s.t.

$$\begin{aligned} \pm(x_1, x_2 - 1)_{(1)}^{(\sqrt{3}/3)} &\leq y_1 \\ \pm(x_1, x_2 - 1)_{(-1)}^{(\sqrt{3}/3)} &\leq y_1 \\ \pm(x_1, x_2 - 1)_{(2-\sqrt{3})}^{(1)} &\leq y_1 \\ \pm(x_1, x_2 - 1)_{(2-\sqrt{3})}^{(-1)} &\leq y_1 \\ \pm(x_1, x_2)_{(1)}^{(\sqrt{3}/3)} &\leq y_2 \\ \pm(x_1, x_2)_{(-1)}^{(\sqrt{3}/3)} &\leq y_2 \\ \pm(x_1, x_2)_{(2-\sqrt{3})}^{(1)} &\leq y_2 \\ \pm(x_1, x_2)_{(2-\sqrt{3})}^{(-1)} &\leq y_2 \\ \pm(x_1 - 1, x_2 - 1)_{(1)}^{(\sqrt{3}/3)} &\leq y_3 \\ \pm(x_1 - 1, x_2 - 1)_{(-1)}^{(\sqrt{3}/3)} &\leq y_3 \\ \pm(x_1 - 1, x_2 - 1)_{(2-\sqrt{3})}^{(1)} &\leq y_3 \\ \pm(x_1 - 1, x_2 - 1)_{(2-\sqrt{3})}^{(-1)} &\leq y_3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Table 4 contains the solutions of problems in each case and the optimal solutions. For the case $w_3 = 2$ the weights satisfy in condition of lemma 3.1 and the optimal solution is in S_2 .

w_3	$x \in S_1$				$x \in S_2$			x_1^*	x_2^*	z^*
	x_1	z_{11}	x_2	z_{12}	x_1	x_2	z_2			
1	-1	2	1	2	0	1	5	-1	1	4
1.5	-1	2.5	1	2.5	0.5	0.7113	5.4338	-1	1	5
2	-1	3	1	3	1	1	5.5774	1	1	5.5774

Table 4: Results for example 2.

4 Summary and conclusion

In this paper we considered the single facility minisum and minimax location problems on a plane which divided into two regions with different norms by a line. Various special cases are discussed and some solution procedures are presented.

References

- [1] Batta R. and S. Palekar (1988), "Mixed planar/network facility location problems." *Computer and Operations Research*, 15(1): 61-67.
- [2] Brimberg J., H. T. Kakhki and G. O. Wesolowsky (2003), "Location among regions with varying norms." *Annals of Operations Research*, 122: 87-102.
- [3] Brimberg J. and R. F. Love (1992), "Local convergence in generalized Fermat-Weber problem." *Annals of Operations Research*, 40: 33-66.
- [4] Francis R., Jr., L.F. McGinnis and J.A. White (1992), *Facility Layout and Location: An Analytical Approach*. Prentice Hall.
- [5] Parlar M. (1994), "Single facility location problem with region-dependent distance metrics." *International Journal Systems Science*, 25 (3): 513-525.
- [6] Ward J. E. and R. E. Wendell (1980), "A new norm for measuring distance which yields linear location models." *Operations Research* 28: 836-844.
- [7] Ward J. E. and R. E. Wendell (1985), "Using block norms for location modeling." *Operations Research* 33: 1074-1090.

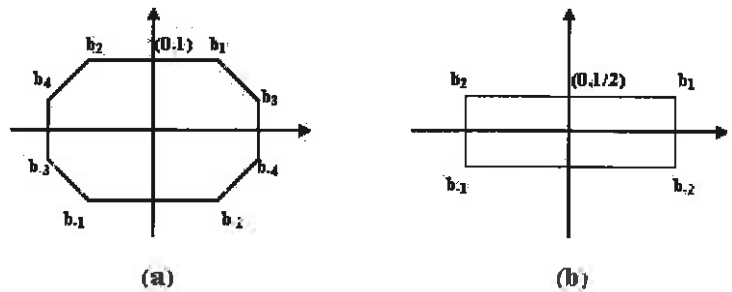


Figure 1: a) Contour of an e_2 -block norm with 8 extreme points. b) Contour of a non e_2 -block norm.

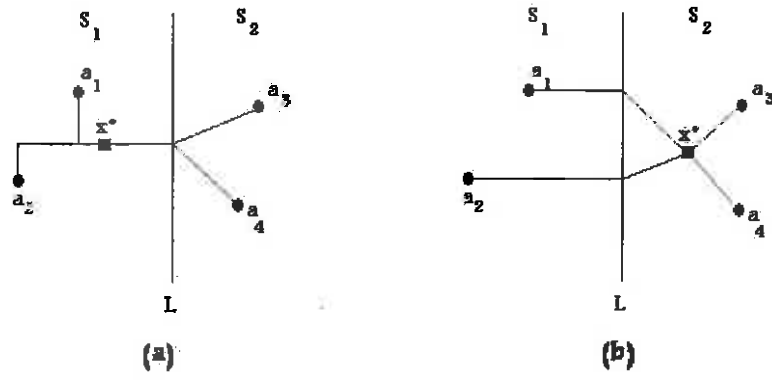


Figure 2: a) x^* is in S_1 ; b) x^* is in S_2

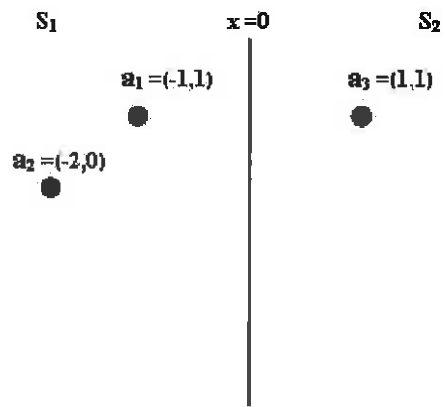


Figure 3:

