وزارت علوم تحقیقات و فنّاوری
دانشگاه صنعتی شاهرود

حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گـــزارش پایانـــی

طرح پژوهشی

روشی برای تعیین جواب مساله طراحی ظرفیت در شرایط عدم قطعیت داده ها

با کد ۲۳۰۲

خرداد ماه ۱۳۸۲

مجری : سید علی میر حسنی
استادیار گروه ریاضی

گزارش نهایی پروژه

روشی برای تعیین جواب مساله طراحی ظرفیت در شرایط عدم قطعیت داده‌ها

مجری

سید علی میرحسنی

استادیارگروه ریاضی- دانشکده علوم

دانشگاه صنعتی شاهرود

بهار ۱۳۸۲

دانشگاه صنعتی شاهرود ص.پ. ۳۱۶- ۳۶۱۵۵

A_MirHassani@Shahrood.ac.ir

بسم الله الرحمن الرحيم

این گزارش نتیجه طرح پژوهشی با عنوان

روشی برای تعیین جواب مساله طراحی ظرفیت
در شرایط عدم قطعیت داده‌ها

است که دریکصدوششمین جلسه درتاریخ ۸۲/٤/۲۲ بتصویب نهایی شورای پژوهش دانشگاه رسیده است.

فهرست مطالب

چکیده

امروزه مدیران شرکتهایی که ازتهیه مواد اولیه تا توزیع کا لا در منازل را بعهده دارند موظف به اخذ تصمیماتی هستند که غالباً اطلاعات کافی و دقیقی در موردپارامترهای موثربر آنها وجود ندارد یعنی تصمیم گیری در شرایط عدم قطعیت.

در اینجا یک مدل ریاضی دو مرحله ای تخصیص منابع با متغیر های ۰ - ۱ برای بیان چنین مسألهای در نظر گرفته شده است.در مقایسه با روشهای قطعی، مجموعهای از سناریوها جهت نمایش عدم قطعیت میزان تقاضا بکار گرفته شدهاست. نتیجه این فرمولبندی یک مدل برنامه ریزی آمیخته بزرگ مقیاس است. حل مسائل برنامه ریزی آمیخته همواره با مشکلات عدیده ای همراه بوده است.بنابر این با بکارگیری روش تجزیه ابتدا مسأله بر حسب سناریوها به قسمتهای کوچکتر تفکیک و سپس هر قسمت متناسب با مراحل مدل به واحد های جزئی تقسیم وحل شده است.. میزان موفقیت در این روش بستگی به تعداد مسائل فرعی و میزان وابستگی آنها به مسأله اصلی دارد. هرچه ساختار مستقلتری تنظیم گردد شانس موفقیت آن در زمان اجرا بالاتر خواهد بود.
در این مقاله سعیشده است با استفاده از ساختار مسأله و الگوریتم برنامهریزی موازی روش برای حل مسأله ارائه شود. میزان موفقیت روش براساس محاسبه میزان کارائی و افزایش سرعت محاسبات بررسی شده است. در پایان نتایج بطور مقایسه ای برای دو روش مختلف ارائه گردیده است که از نظر کیفیت جواب و زمان محاسبه کاملاً قابل تأمل می باشد

واژه های کلیدی: برنامه ریزی استوکاستیک. پردازش موازی. تحلیل سناریو. کارائی

مدلهای برنامه‌ریزی استوکا ستیک (SP) در بررسی این مسائل از دو جنبه حائز اهمیت هستند. اولا آنها ساختار مدلهای برنامه‌ریزی قطعی ظرفیت تولید را بکار گرفته و به تخصیص بهین امکا نات میپردازند. ثانیا انعطاف پذیری انها اجازه میدهد که بطور صریح تصادفی بودن داده ها را مورد توجه قرار داده و با بکارگیری حجم وسیعتری از داده ها در مقایسه با مدلهای قطعی تصمیماتی منطقی تر و واقعی تر اتخاذ نمایند.در این میان مدلهای استوکاستیک دو مرحله ای از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. این مدلها در زمینه های مختلفی همچون نیروگا های برق (۴ را ببینید) سیستم توزیع کالا (۸ را ببینید.) گسترش ظرفیت تولید (۲۶ را ببینید.) و خیلی موارد دیگر با موفقیت بکارگرفته شده اند.

موفقیت این روش مدل سازی مدیون قابلیت آنها در ادغام تصمیمات زمان حال و آینده است. در واقع در این مسائل تصمیمات در طول زمان و همراه با بهبود اطلاعات برنامه ریز از آینده اتخاذ میشوند تصمیمات استراتژیک، مانندزمان و محل احداث واحد ها، خط مشی طولانی مدت فعالیت شرکت را مشخص میکنند در حالیکه تصمیمات عملیاتی، مانند میزان تولید ماهانه و نحوه توزیع، معمولا دوره های کوتاهتری را پوشش میدهند. بعلاوه در زمانی که تصمیمات استرتژیک گرفته میشوند اطلاعات کاملی از پارامتر های مسأله مثل قیمت فروش یا میزان تقاضا در دوره‌های آتی وجود ندارد اما در زمان تصمیمات عملیاتی اطلاعات کاملترو با جزئیات بیشتری در دسترس می باشد.

یک رده مهم از مدلهای استوکا ستیک دو مرحله ای مدلهای خطی بازگشتی هستند در این مدلها تصمیمات مرحله اول در جهت مینیمم کردن هزینه این تصمیمات (استراتژیک) و امید ریاضی هزینه تصمیمات مرحله دوم (عملیاتی) اتخاذ میگردد. در واقع تصمیمات مرحله دوم را پیامدی از تصمیمات مرحله اول ارزیابی کرده امید ریاضی هزینه آن رابعنوان تابع بازگشتی می شناسند.

این ساختار سلسله مراتبی تصمیمات، بخوبی در روشهای حل مبتنی بر تجزیه بکارگرفته شده و بر این اساس روشهای تجزیه متفاوتی ابداع گردیده است. از جمله روش تجزیه بندرزبرای مدلهای آمیخته (۳ را ببینید.) ادغام سناریوها(۲۳و۲۵ را ببینید.) وتجزیه استوکا ستیک (۲۰ را ببینید.) را میتوان نام برد که با موفقیت در حل تعدادی از مسائل استوکا ستیک بکارگرفته شده اند. روشهای تجزیه از ویژگیهای مدلهای استوکاستیک و ساختار مدلهای آمیخته بطور همزمان بهره گرفته و به حل این مسائل می پردازند در این مدلها برای تصمیمات مرحله اول و همچنین قسمتی یا تمام تصمیمات مرحله دوم از متغیر های عدد صحیح و یا متغیرهای دودوئی استفاده می شود و از این جهت آنها را بعنوان مدلهای استوکا ستیک دو مرحله ای عدد صحیح (ISP) می شنا سند.در ۱۹۸۰ وا لمر (۲۷ را ببینید.) روشی مبتنی بر صفحه های برش‌دهنده برای حل این مسائل وقتی فقط متغیر

هـای مـرحله اول بـه مقادیر صحیح (۰و۱) محدود شده اند و سایر متغیرها پیوسته هستند ارائه داد درایـن مـورد پارامـتر های تصادفی از یک توزیع احتمالی پیروی می‌کردند. بن استوک و شپیرو در ۱۹۸۴ نـیز بـا استفاده از ساختار مدلهای چند مرحله‌ای ان را به یک مدل ISP دو مرحله ای تقلیل داده وحـل کردند (۴ را ببینید). بهر حال این روشها وقتی کارآمدند که مدل مرحله اول (قسمتی از مـدل کـه وابسته به تصمیمات مرحله اول است) بحد کافی کوچک بوده و پارامترهای مسأله روی مجموعـه کوچکـی از مقـا دیـر تغییر کنند یعنی یک تعداد کم و قابل کنترلی سناریو در نظر گرفته شود.

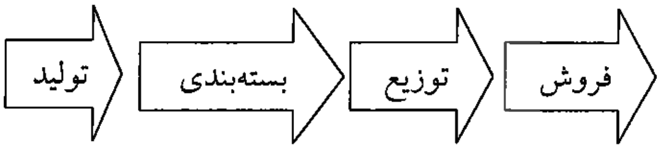
وقتـی روشهای تجزیه روی مدلهای ISP بکارگرفته میشوند اغلب موفقیت آنها منوط به پشتیبانی، راهنمائـی و ارائـه راهکارهـای عملـی کاربـر اسـت در غـیر ایـن صورت ممکن است آنها با عدم همگرائـی و یـا همگرائی دیر هنگام مواجه شوند.وقتی تعداد سناریو ها زیاد است و یا حل مسا ئل فرعی (مسأله ای که در مرحله تجزیه مدل ساخته میشودو فاقد متغیر های مرحله اول است.) بسا د گـی امکـان پذیـر نیسـت بکارگیری راههای ابتکاری از اهمیت ویژه ای برخوردار می شوند.(۴ را ببینید.)

یک مسأله اساسی در استفاده از مدلهای بهینه سازی ایجاد تعادل بین سطح جزئیات مورد نیاز و ساده و قابل حل بودن مدل است در مواجهه با مدلهای MIP بزرگ مقیاس اغلب روشهایی که با یک تقریب مناسب جوابی را محاسبه میکنندویا کرانی برای تابع هدف ارائه میدهند ترجیح دارند. در یک مسأله مینیمم سازی محاسبه یک کران پائین از طریق آزادسازی گروهی از محدودیتها امکان پذیر است. روش آزادسازی لاگرانژ یکی از این روشها ست که با تکیه بر ویژگیهای ساختاری مسأله امکان محا سبه چنین کرانی را در زمانی قابل قبول فراهم می آورد. این روشی کاملاً شناخته شده است که تاکنون در زمینه های مختلف با موفقیت بکارگرفته شده است (۲و۱۸و ۱۹ راببینید). بهر حال با تعیین قسمتهای مجزای مسأله میتوان آن را به مسأله های فرعی مستقل تفکیک کرد. اگرچه که لازم نیست یک مسأله فرعی ویژگی خاصی داشته باشد اما آن باید نسبت به مسأله اصلی از پیچیدگی کمترواندازه کوچکتری برخوردار باشدبطوریکه بتوان آن را به کمک نرم افزار های موجود حل کرد.برای کاربردهایی از این شیوه ۷و۱۵و۱۷ را ببینید. میزان موفقیت در این روش به تعداد مسائل فرعی و میزان وابستگی آنها به مسأله اصلی دارد. هرچه ساختار مستقل‌تری تنظیم گردد شانس موفقیت آن در زمان اجرا بالاتر خواهد بود در این مقاله سعی‌شده است با استفاده از ساختار مسأله و الگوریتم برنامه‌ریزی موازی روشی برای حل مسأله ارائه شود. میزان موفقیت روش براساس محاسبه میزان کارائی و افزایش سرعت محاسبات بررسی شده است.

ساختار ایـن نوشتار بدین شرح است در بخش ۲ خلاصه ای از مسأله مورد مطالعه و مدل ریاضی آن ارائه می شود. بخش ۳ به تشریح مشکلات حل مسأله می پردازد و دو راهکار عملی برای تعیین جـواب نشـان مـیدهد. در بخـش پایانـی گزارشـی از نتایج بدست آمده همراه با مقایسه دو روش مذکور آمده است.

۲ مسأله تعیین ظرفیت

مدل مورد مطالعه مسأله ای استراتژیک جهت تعیین ظرفیت یک واحد تولیدی است که زنجیره ای از فعالیتهای مختلف را شامل میشود. این مدل کلیه مراحل عملیاتی از سفارش مواد اولیه تا تحویل محصـولات نهائـی بـه مصـرف کنـندگان را در بـر گرفـته و در هـر مـورد تصمیمی مناسب اتخاذ میکـند.چهـار مـرحله اصـلی ایـن فرآیـند عبارتند از تولیدوبسته بندی درمحل کارخا نجات، حمل محصـولات از کارخانجـات بـه مراکـز توزیع وارسال محصولات از مراکز توزیع به عوامل فروش. (شکل ۱ را ببینید.)



شکل۱

در ایـن مدل دو مرحله ای تصمیمات استراتژیک (تصمیمات مرحله اول) در ارتباط با مسائلی از قبـیل تعییـن زمان تاسیس کارخانجات با توجه به مدت لازم برای نصب ماشین آلات، تعیین زمان بسـتن و یـا تغییر کاربری آنها، تعیین زمان باز و بستن مراکز توزیع، تعیین سطح ظرفیت هر یک بر حسـب تعـداد خطوط تولید بسته بندی ویا توزیع و همچنین نوع تکنولوژی مورد نیازکه همگی در قالـب متغیـرهای گسسته (دودوئی) بیان شده اند. تصمیمات عملیاتی (تصمیمات مرحله دوم) در ارتـباط بـا مـیزان تولید، بسته بندی، حجم کالای قابل انتقا ل از کارخا نجات به مراکز توزیع و از مراکـز توزیـع بـه مراکـز فـروش و غـیره میباشد این نوع تصمیمات درقالب متغیرهای پیوسته بیان میشوند. این گروه اکثریت غالب متغیر های مدل را تشکیل می دهند.

از آنجائـی کـه هـرگونه فعالیـت اقتصادی همراه با محدودیتهایی نیز میباشد لذا در این مدل هم دو نوع محدودیت تعریف شده است.

(الف) محدودیتهای منطقی (محدودیتهایی که ارتباط بین متغیرهای دودویی را تعریف می‌کنند) از قبـیل محدودیتهایـی که تضمین می کنند فقط خطوط دائر کارخانجات بکار گرفته شوند و از آنها حداکثر به اندازه ظرفیتشان استفاده شود میزان سرمایه گذاری بیش از سرمایه موجود نباشد و سایر قیود وابسته به تصمیمات استراتژیک.

(ب) محدودیـتهای عملیاتی که نا ظر بر تعادل مواد اولیه و میزان تولید، کمیت تولیدو بسته بندی، مـیزان بسته بندی و انتقال و غیره هستند. همچنین محدودیتهایی که حجم تقاضای برآورده نشده را تعیین میکنند. این گروه اکثریت غالب محدودیتهای مدل را تشکیل می دهند.

در قسمت بعد خلاصه ای از فرمولبندی مدل ارائه می شود.

۲-۱ توصیف مدل

تابع هدف:

⌘ تـابع هـدف مـدل درجهـت تعییـن ماگزیمم سود تنظیم شده است که در قالب یک مسأله مینیمم سازی بصورت ذیل نوشته میشود.

(درآمد- هزینه) مینیمم =مینیمم مقدارتابع هدف

درآمد عبارت است از درآمد ناشی از تامین کل تقاضا منهای درآمدی معادل تقاضای تامین نشده (درآمد کسب نشده) و جریمه تقاضای برآورده نشده.

هزینه عبارت است از کل هزینه های انجام شده از قبیل هزینه حمل ونقل، باز کردن کارخانجات جدید، بستن کارخانجات موجود،باز و بستن مراکز توزیع وهمچنین خطوط مختلف تولید، بسته بندی و توزیع.

⌘ **محدودیتها:**

محدودیتهای منطقی تضمین می کنند که

- تعـداد خطوط در هر کارخانه یا هر مرکز توزیع بیشتر از حد مجاز نشود. در حال حاضر در هر کارخانه حداکثر ۴ خط تولید، ۱۰ خط بسته بندی و در مجموع ۱۳ خـط (از هر دو نوع) مجاز است. همچنین در هر مرکز توزیع حداکثر ۱۴ خط که همگـی از یـک تکـنولوژی اسـتفاده مـی کنند مجاز می باشد در حال حاضرتنوع تکنولوژی تولید، بسته بندی و توزیع به ترتیب ۲و۳و۳ می باشد.
- مـیزان سـرمایه گـذاری بـرای نصـب خطـوط جدیـد تولید، بسته بندی، توزیع و همچنیـن تاسـیس کارخانجـات و مراکـز توزیع جدید ویا بستن آنها در هر دوره مساوی یا کمتر از بودجه تخصیص یافته به آن دوره باشد.
- سـایر محدودیـتهای مربوط به کارخانجات، مراکز توزیع و خطوط کاملاً رعایت شوند.

محدودیت تقاضا تضمین می کند که

در هر مرکز فروش میزان کمبود هر کالا برابر باشد با مقدار تقاضا در آن مرکز منهای میزان کالای دریافتی از مراکز توزیع(به تفکیک کالا و دوره).

محدودیت سفارش تضمین می کند که

در هـر مرکـز توزیع کل کالای دریافتی از کارخانجات برابر باشد با کل کالای ارسالی به مراکز فروش. (به تفکیک کالا و دوره) بعبارت دیگر در مراکز توزیع پیش بینی انبار نشده است.

محدودیت بسته بندی تضمین می کند که

در هـر کارخانـه کل کالای بسته بندی شده برابر باشد با کل کالای ارسالی به مراکز توزیع (به تفکیک کالا و دوره).

محدودیت تولید تضمین می کند که

در هر کارخانه کل کالای بسته بندی شده برابر باشد با کل کالای تولید شده (به تفکیک کالا و دوره).

محدودیت ظرفیت تضمین می کند که

در هـر کارخانـه کـالای تولیدی بیشتر از ظرفیت خطوط تولید و بسته بندی نصب شده نباشد همچنیـن در هر مرکز توزیع ظرفیت خطوط توزیع رعایت شود.ظرفیت خطوط بر اساس زمان مـورد نـیاز کـالا در هرپروسه اندازه گیری شده است. برای توصیف کاملی از این مدل (۱) را ببینید.

تـنها پارامـتر غـیر قطعـی (احتمالـی) مدل میزان تقاضا برای هر محصول درهر دوره در مراکز فـروش اسـت. در این مورد براساس اطلاعات موجود تعدادی سناریوی قابل قبول برای میزان تقاضـای آتـی محصـولات در نظـر گرفـته شـده است.(تعداد ۱۰۰ سناریو) شانس وقوع کلیه سـناریوها یکسـان و برابـر $\rho_s = 1/S$ فرض شده است (S = ۱۰۰ تعداد سناریو). این مدل درنمایش ماتریسی بصورت مسأله P_0 می باشد.

$$
\begin{aligned}
& Min\ Z = cx + \sum_{s\in S} \rho_s f y_s \\
& s.t. \\
& Ax = b \\
& Bx + Dy \le h \\
& \qquad Ey = d_s \quad \forall s \in S \\
& x \in \{0,1\}^n, y \ge 0 \\
& \qquad P0
\end{aligned}
$$

ک در آن x برداری از متغیرهای گسسته دودوئی و y برداری از متغیرهای پیوسته بوده و به ترتیب تصمیمات استراتژیک و عملیاتی را نشان می دهند.

ایـن مـدل حتـی بـا در نظـر گرفتن فقط یک سناریو(یعنی مدل بدون در نظر گرفتن عدم قطعیت پارامـتر تقاضا) بسیار بزرگ و شامل تعداد زیادی محدودیت و متغیر دودوئی است. (جدول ۱ را ببینـید.)بخاطر اندازه مدل و همچنین تعداد زیاد متغیرهای دودوئی حل مسأله هم ارز قطعی (مدلی شـامل همـه سـناریوها) P_0 بـرای تعیـین جـواب بهیـن ویـا تأیید بهینگی جواب روشهای تجزیه غیرممکـن اسـت. حتـی حـل کامل مدل با فقط یک سناریو نیز بسیار دشوار می باشد.در جدول ۱ اطلاعات اصلی مدل ارائه شده است.

جدول ۱ : ابعاد مدل		
نوع	درصد از کل	تعداد
محدودیتهای منطقی	٪۲٤	۱٤٦۰
محدودیتهای عملیاتی	٪۷٦	٤٥۲۰
متغیرهای گسسته(دودوئی)	٪۳	۱۱۹٦
متغیرهای پیوسته	٪۹۷	٤٤۰۲۱
چگالی ماتریس	٪۰/۰٤	۱۱۸۸۸٤
سناریو	–	۱۰۰

اگـراز سطرآخرجدول ۱ صرفنظر کنیم باقی اندازه یک مدل خطی آمیخته بزرگ(فقط یک سناریو) را نشـان مـیدهد. ایـن یـک مسـأله دو مرحله ای برنامه ریزی استوکاستیک آمیخته است که در آن متغیرهای گسسته نمایش تصمیمات مرحله اول و متغیرهای پیوسته مبین تصمیمات مرحله دوم می باشـند. ابـتدا مسأله آمیخته P_1 (با یک سناریو) جهت تعیین اعتبار روابط منطقی قسمتهای مختلف مـدل وهمچنیـن مفـید بودن آن بکار گرفته شد. بعلاوه با تکرار این عمل روی سناریوهای متفاوت چگونگـی عملکـرد آن در شـرایط گونـاگون و مـیزان حساسیت آن به تغییرات تقاضا بررسی شد. تعییـن جواب بهین یک مسأله آمیخته با چنین ابعادی عملاً غیر ممکن است لذا پروسه‌ای ابتکاری متناسـب بـا شـرایط مسـأله بکـار گرفـته شـده است تا بکمک نتایج بدست آمده از سناریویهای مختلف بتوان جوابی نسبتاً خوب در زمانی مناسب برای مسأله P_0 فراهم کرد.

نمایش ماتریسی فرمولبندی مدل برای یک سناریو بشرح ذیل می باشد.

$$
\begin{aligned}
& Min\ Z = cx + fy \\
& s.t. \\
& Ax = b \\
& Bx + Dy \leq h \\
& \qquad Ey = d_s \\
& x \in \{0,1\}^n, y \geq 0 \\
& \quad P1
\end{aligned}
$$

۳ راهکارهای حل مسأله

مدل استوکاستیک بخش قبل با توجه به تعداد متغیرها ,محدودیتها و سناریوها تعریف شده خیلی بزرگ است. در مسائل استوکاستیک بزرگ مقیاس بررسی عملکرد مدل تحت شرایط هر یک از سناریوها فرصتی است تا شناختی نسبت به رفتار سناریوها پیدا کرده و سناریوهای مشکل را شناسایی کنیم. همچنین در قالب تحلیل سناریوها ممکن است شرایطی فراهم گردد که بتوان تعداد سناریوهای اولیه، متغیرها و یا محدودیتها را کاهش داد. بدیهی است که د ستیابی به چنین شرایطی شانس حل مسأله را افزایش می‌دهد و کار با آن را راحت‌تر می‌کند. میزان موفقیت در این روش به تعداد مسائل فرعی و میزان وابستگی آنها به مسأله اصلی دارد. هرچه ساختار مستقل‌تری تنظیم گردد شانس موفقیت آن در زمان اجرا بالاتر خواهد بود در این مطالعه سعی‌شده است با استفاده از ساختار مسأله و الگوریتم برنامه‌ریزی موازی روشی برای حل مسأله ارائه شود. میزان موفقیت روش براساس محاسبه میزان کارائی و افزایش سرعت محاسبات بررسی شده است.

در تحلیل سناریوها ابتدا جوابی بفرم بردار(x,y) برای مسأله آمیخته نظیر هر سناریوبدست می‌آیددر اینجا جواب نظیر x را جواب استراتژیک وجواب نظیر y را جواب عملیاتی مینامیم. فرض کنید $\bar{x}$ جواب استراتژیک نظیر یک سناریو باشد چون قادر به تایید بهینگی چنین جوابی نیستیم لذا با اجرای پروسه ای به ارزیابی کیفیت آن می پردازیم. یک روش منطقی در این خصوص بررسی عملکرد این جواب تحت شرایط دیگر سناریوهاست. محاسبه میانگین و انحراف معیار مقدار تابع هدف به ازای یک جواب استراتژیک مفروض روی همه سناریوهای موجود شاخصی مناسب برای ارزیابی سناریوهاست (۲۶ را ببینید).

مراحل اصلی تحلیل سناریوها بشرح ذیل می باشد.

فاز ۱) تعیین یک جواب عدد صحیح برای هر سناریو(جواب استراتژیک)

فاز ۲) ارزیابی عملکرد جوابهای استراتژیک روی همه سناریوها

فاز ۳) تطبیق جوابهای استراتژیک و تثبیت بعضی از متغیرهای دودوئی برطبق جوابهای استراتژیک خوب.

در کل ما تجزیه و تحلیل سناریوها را با اهداف زیر انجام می دهیم.

ارزیابی عملکرد جوابهای استراتژیک با در نظر گرفتن سناریو های حدی (مینیمم تقاضا و ماگزیمم تقاضا)

تعیین سناریوهایی که به جواب یکسانی منجر میشوند.

تعیین جوابهای استرتژیک خوب که در مراحل بعدی مورد نیاز میباشند.

محاسبه میانگین و واریانس سود تحت هر جواب استراتژیک. در بخشهای بعدی فازهای مختلف تجزیه و تحلیل سناریوها را به دو طریق متفاوت انجام می دهیم. مهم‌ترین گام در بررسی‌ها تعیین جواب‌های استراتژیک در زمانی مناسب می‌باشد. از آنجایی‌که هر جواب استراتژیک می‌تواند دستیابی به جوابی بهتر را ممکن سازد. لذا چگونگی حل مسأله P_0 و تعداد جواب‌های محاسبه شده در یک زمان مناسب محور مطالعه می‌باشد. برای این منظور یک روش رایج و روش مبتنی بر تجزیه به کار گرفته شده است. در خصوص کاهش زمان محاسبه نیز از الگوریتم موازی بهره گرفته شده است.

۳-۱ تحلیل سناریوها به روش رایج

فرض کنید $P_{MIP}(s)$ نمایش مسأله آمیخته نظیر سناریو s بوده و $\bar{x}_s$ جواب استراتژیک (احتمالا غیر بهین) آن باشد.بنابر این به ازای هر سناریوی $s = 1...S$ داریم.

$$
\begin{aligned}
&P_{MIP}(s)\text{: } Min\ Z = cx + fy \\
&s.t. \\
&Ax = b \\
&Bx + Dy \le h \\
&\qquad Ey = d_s \\
&x \in \{0,1\}^n, y \ge 0 \\
&\qquad P2
\end{aligned}
$$

اکنون فرض کنید $P_{LP}(s,j)$ نمایش مسأله آمیخته نظیر سناریوی s باشد وقتی که متغیرهای گسسته آن مقدار ثابت نظیر جواب استراتژیک j را اتخاذ کرده باشند. واضح است که چنین مسأ له ای فاقد متغیر گسسته است و براحتی قابل حل میباشد. حضور متغیر های کمبود وجود حداقل یک جواب شدنی را تضمین می کند. بنابر این به ازای هر(s,j) داریم

$$
\begin{aligned}
&P_{LP}(s,j):\ Min\ Z = c\bar{x}_j + fy \\
&s.t. \\
&Dy \le h - B\bar{x}_j \\
&Ey = d_s \\
&y \ge 0
\end{aligned}
$$

$P3$

بـه مـنظور تولـید جـواب استراتژیک همه سناریوها در فاز ۱ باید مجموعه ای از S مسأله آمیخته بـزرگ P_2 حل شود. در فاز ۲ تعداد $S \times S$ مسأله P_3 برای ارزیابی عملکرد جوابهای استراتژیک تحت سناریوهای مختلف حل میشود نهایتا با تعیین جوابهای استراتژیک خوب وتطبیق آنها میتوان تعـدادی از متغیرهای گسسته را از مدل حذف کرد.برای جزئیات بیشتری از این روش (۲۱ و ۲۲) را ببینید.

۳-۲ تحلیل سناریوها با روش تجزیه لاگرا نژ

نـتایج بدست آمده در روش قبلی نشان می دهد که قسمت عمده زمان محاسبات صرف اجرای فاز ۱ تحلـیل سناریوها شده است. بعلاوه واضح گردید که سعی در تعیین جواب بهین عملا بی نتیجه است. بنابر این تعیین اولین جواب عدد صحیح برای هر مسأله تا حدی زمان محاسبات را کوتاه می کـند. بهر حال فاز ۱ نشان می دهد که تولید جواب استراتژیک در زمانی قابل قبول از اهمیت ویژه ای برخوردار است. این نکته انگیزه ای گردید تا در جستجوی روشی باشیم که ضمن تولید جواب هـای اسـتراتژیک خوب اجرای فاز ۱ را در حد ممکن تسهیل کند. با استفاده از آزاد سازی لاگرانژ ابـتدا انـدازه مسـأله را کـاهش داده و سـپس آنرا به مسائل فرعی کوچک، تر تجزیه کردیم. در این روش تعـدادی از محدودیـتها آزاد و همراه با جریمه های مناسب (موسوم به ضرائب لاگرانژ) به تابع هدف منتقل شدند. سپس نسبت به حل مسائل اصلاح شده اقدام گردید.روش لاگرانژ برای هر مسـأله آمیخـته یـک کـران تعیین میکند بعلاوه جواب بدست آمده را میتوان بنحوی اصلاح کرد تا جوابـی شـدنی بـرای مسـأله اولیه P_1 باشد. این کرانها و جوابهای شدنی بازه تغییرات مقدار تابع هـدف مسـأله اولـیه P_1 را مشخص میکنند.همچنین بکمک آنها میتوان مقادیر جدید جریمه ها را محاسـبه کـرد. این پروسه تا زمانی که شرایط توقف الگوریتم فراهم گردد ادمه می‌یابد. لازم به ذکر اسـت کـه بطـور نظـری امکـان آزاد سـازی گـروه های متفاوتی از محدودیتها وجود دارد انتخاب محدودیتهای مناسب در اجرای موفق الگوریتم نقش تعیین کننده ای دارند.

۳-۳ تعیین جوابهای استراتژیک

در اجـرای روش لاگرانـژ گروهـی از محدودیـتهای منطقـی مسـأله P_2 انـتخاب شـده و همـراه با جـریمه‌ای بـه تـابع هـدف اضافه شدند. اولین گروه از محدودیتهای انتخابی محدودیتهای ظرفیت هسـتند کـه با جریمه λ به تابع هدف منتقل شدند. به منظور اجتناب از داشتن تعداد زیادی جریمه بعضی از محدودیتها در هم ادغام شده اند. برای روشن شدن وضعیت محدودیتهای ظرفیت آنها را با جزئیات بیشتری در اینجا می‌آوریم.

۱)برای هر تکنولوژی تولید در هر دوره و در هر کارخانه باید

(میزان تولید) - (ظرفیت تولید) ≤ 0

۲) برای هر تکنولوژی بسته بندی در هر دوره و در هر کارخانه باید

(میزان بسته بندی) - (ظرفیت بسته بندی) ≤ 0

۳) برای هر تکنولوژی توزیع در هر دوره و در هرمرکز توزیع باید

(میزان توزیع)- (ظرفیت توزیع) ≤ 0

ایـن محدودیتها تضمین می کنند که کالایی بیشتر از ظرفیت و امکانات موجود تولید، بسته بندی یا توزیـع نشـود. در ایـنجا محدودیـتهای ظرفیـت تولـید بـر حسب تکنولوژی تولیدو محل کارخانه، محدودیـتهای ظرفیـت بسـته بـندی بـر حسـب تکـنولوژی بسـته بـندی و محـل کارخانه و نهایتا محدودیـتهای ظرفیـت توزیـع بـر حسـب تکنولوژی توزیع و مرکز توزیع در هم ادغام شده اند. با مشـخص شـدن محدودیتهایـی که باید به تابع هدف منتقل شوند قادریم مسأله P_1 را بصورت زیر تجزیه کنیم به ازای هر سناریو s داریم

$$\text{Min } Z = cx + fy + \lambda(Bx + Dy - h)$$

Or

$$\text{Min } Z = (c + \lambda B)x + (f + \lambda D)y - \lambda h$$

s.t.

$$Ax = b$$

$$Ey = d_s$$

$$x \in \{0,1\}^n, y \geq 0, \lambda \geq 0$$

P4

بررسـی ساختار مسأله P_4نشان می دهد که از دو مسأله کاملا مجزا تشکیل شده است. اولین مسأله یعنـی P_5 یـک مسـأله عـدد صـحیح (IP) است وقتی که λ مقدار ثابت $\lambda 0$ را اختیار کرده باشد. فـرض کنـید $\bar{x}$ جـواب مسـأله P_5 نظیر سناریو s باشد. از اینکه هر جواب مسأله P_5 یک جواب شـدنی مسـأله P_1 اسـت پـس آن یک جواب استراتژیک است . با حل مسأله P_3 تحت این جواب

استراتژیک میتوانیم یک کران بالا ub_0 را برای مسأله اولیه P_1 محاسبه کنیم. بدین ترتیب روش لا گرانـژ در جهت تعیین یک جواب مسأله بکار گرفته شده است. دومین مسأله یعنی مسأله P_6 کاملا از متغـیرهای پیوسـته تشکیل شده است با حل آن وقتی که λ مقدار ثابت λ_0 را اختیار کرده است یک جواب $\bar{y}$ برای متغیرهای پیوسته بدست می آید. با افزودن مقدار تابع هدف مسائل P_5 و P_6 و کم کردن مقدار ثابت λh یک کران پائین lb_0 برای مسأله اولیه بدست می آید.

$$\begin{array}{lll} \min\ Z = fy + \lambda Dy & & Min\ Z = cx + \lambda Bx \\ s.t. & & s.t. \\ Ey = d_s & \text{و} & Ax = b \\ y \ge 0, \lambda \ge 0 & & x \in \{0,1\}^n, \lambda \ge 0 \\ P6 & & P5 \end{array}$$

بـا تعیین کران های بالا و پائین برای مسأله اولیه P_1 و بکارگیری روش زیرگرادیان قادریم ضرائب لاگرانـژ را مجدداً محا سبه کرده و این پروسه را تکرار کنیم. در هر تکرار که با مجموعه ای جدید از جـریمه هـا انجـام میشـود یـک جـواب استراتژیک بدست می آید. تکرار این روش روی کلیه سـناریوها مـنجر بـه مجموعـه ای از جوابهـای اسـتراتژیک مـی گـردد. در زیر گامهای اصلی این الگوریتم را نشان میدهیم.

داریم:

BUB : بهترین کران بالا.

BLB: بهترین کران پائین.

λ : ضرائب لاگرانژ (جریمه ها).

T و π : پارامترهای طول گام در روش زیرگرادیان.

G_i گرادیان محدودیت آزاد شده i ام.

گـام (۰) مقادیـر اولـیه BLB, BUB ، λرا بترتیـب برابـر$-\infty,+\infty$ ، ۰ قرار می دهیم. همچنین شـمارنده الگوریـتم (شمارنده تعداد دفعاتی که مسائل P_3,P_6,P_5 حل میشوند.) را نیز برابر صفر تنظیم میکنیم.

گـام (۱) مسـأله عـدد صـحیح P_5 را بـه روش شـاخه و کران حل کرده ، جواب جدید را ذخیره می‌کنیم سپس مسأله P_6 را به روش نقطه داخلی(IPM) حل میکنیم.

گـام (۲) بـا حـل مسـأله P_3 بـه روش نقطـه داخلـی یک جواب شدنی برای مسأله اولیه محاسبه می‌کنیم. لازم به ذکر است که در این مرحله کلیه متغیرهای گسسته مقداری ثابت اختیار کرده اند و

حـل ایـن مسـأله براحتـی امکـان پذیر است. با توجه به وجود متغیرهای کمبود وجود حداقل یک جواب شدنی برای این مسأله تضمین شده است.

گـام (۳) مقادیـر جدیـد کرانهای بالا و پائین را محاسبه میکنیم. اگر شرایط توقف الگوریتم فراهم اسـت مـتوقف میشـویم. در غیراینصـورت به گام (۴) میرویم. بهرحال همواره یک حد نهایی برای تعداد تکرار در الگوریتم تعریف میشود تا از ایجاد حلقهء تکرار نا متناهی جلوگیری شود.

گام (۴) برداری جدید از جریمه ها را محاسبه میکنیم به این امید این که جواب بعدی جوابی بهتر باشـد وسـپس بـه گـام (۱) برمـیگردیم. در ایـنجا ایجاد تعادل بین پارامترهای طول گام در روش گـرادیان و تعـداد تکـرار الگوریـتم ضـروری اسـت. زیرا گامهای بلنداز کیفیت جوابها می کاهد و گامهـای کوتاه زمان اجرای محاسبات را افزایش میدهد.به هر حال تنظیم این مقادیر ثابت تا حدود زیادی تجربی بوده و به شرایط مسأله بستگی دارد.

اگـر تعـداد تکـرار الگوریـتم بـرای هـر سـناریوبطور متوسط K بار فرض شود (این مقدار برای سـناریوهای مخـتلف یکسـان نیسـت) در پایـان K×S جـواب اسـتراتژیک محاسبه شده است که ارزیابی کیفیت آنها مورد نیاز است. در بخش بعدی به این موضوع می پردازیم.

۴ ارزیابی و تعیین جواب استراتژیک

در این قسمت به کمک مدل ارائه شده در مسأله p_7 به انتخاب یک جواب مناسب‌تر از این جواب‌های استراتژیک موارد پرداختها و روش برای کاهش متغیرهای دودوئی ارائه می‌دهیم.

۴-۱ ارزیابی جوابهای استراتژیک

از ایـنکه امکـان ادامـه الگوریـتم تـا تعییـن جـواب بهیـن وجـود ندارد لذا لازم است تا جوابهای استراتژیک بدست آمده را ارزیابی و برای هر سناریو بهترین جواب استراتژیک ممکن رااز بین آنها انـتخاب کنـیم.فـرض کنید تعداد N جواب استراتژیک در اختیار است.اگر $\bar{x}_i ,i=1,\dots,N$ i مین جـواب اسـتراتژیک باشـد آنگـاه حـل مسأله P_7 بهترین جواب ممکن برای سناریو s را مشخص میکـند.ایـن مسـأله کـه حداکـثرN متغـیر دودوئی دارد از افزودن محدودیتهای جدید به مسأله P_3 بصورت زیربدست می آید.

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } Z = cx + fy \\
&\text{s.t.} \\
&Dy \le h - Bx \\
&Ey = d_s \\
&x = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \bar{x}_i \\
&\sum_{i=1}^{N} \beta_i = 1 \\
&y \ge 0, \beta_i \in \{0,1\}, x \ge 0
\end{aligned}
$$

P7

در ایـن مسأله β_i متغیری دودوئی است .آن برابر ۱ خواهد بود اگر جواب $\bar{x}_i$برای سناریوی s انتخاب شود در غیر اینصورت صفر است. با حل مسأله P_7 برای هر سناریوی s جدولی $N{\times}S$ (نظـیر S سـناریو و N جـواب اسـتراتژیک) بدست می اید که مقدار تابع هدف مسأله P_1 را تحت ترکیـبات مخـتلف جوابهـای اسـتراتژیک و سـناریوها نشـان می‌دهد .برای هر جواب استراتژیک میانگیـن مقادیر آن تحت کلیه سناریوها (میانگین سطری جدول فوق) مقدار تابع هدف مسأله P_0 را نشـان می دهد. بعبارت دیگراین مقدار مبین میزان سود شرکت است وقتی که جواب استراتژیک مذکور بعنوان جوابP_0، مسأله تحت شرایط عدم قطعیت، انتخاب شود.

اگـر بـه جوابهـای انـتخاب شـده بـرای سـناریو.هـا دقـت کنیم در می یابیم که بعضی از جوابهای استراتژیک بیش از سایرین انتخاب شده اند ما از چنین جوابهایی بعنوان جواب خوب یاد کرده‌ایم. جوابـی که برای هیچ سناریویی انتخاب نشده است در محاسبات بعدی در نظر گرفته نمی شود .در زیرچگونگـی انتخاب جوابها وقتی که از کل جوابهای استراتژیک تولید شده تحت هر سناریو فقط یکی در نظر گرفته شده است را بیان می کنیم. بنابراین فقط S جواب استراتژیک در آن لحاظ شده است. این نشان می دهد چه سناریوهایی پتانسیل تولید جواب بهتررا دارند.

۲-۴ تطبیق جوابهای استراتژیک

نگاهـی دقـیق تر به جوابهای استراتژیک (جوابهای خوب) نشان میدهد که آنها برداریهایی هستند بـا مؤلفـات صـفر یـا یک. بنابراین اگر یک مؤلفه در تمام جوابها مقداری یکسان مثلا ۱ را اختیار کـرده باشـد میـتوان آنـرا بعنوان تصمیمی در نظر گرفت که کلیه سناریوها روی ان توافق دارند لذا منطقی خواهد بود تا متغیر نظیر آن را به عدد یک تثبیت کرده و این متغیر دودوئی را حذف نمائیم. بـه ایـن ترتیب تعدادی از متغیرهای دودوئی به مقادیر صفر یا یک تثبیت شده و از مدل حذف می گـردند. بـا حـذف جمعی از متغیرهای گسسته می توان ادامه محاسبات را سریعترو راحت ترانجام داد

۵ ارزیابی راهکارهای محاسباتی

در حل مسأله مطروحه دو راهکار در پیش‌رو می‌باشد که از نظر زمان محاسبه قابل تأمل هستند. یکی استفاده از روش تک‌پردازشگر و دیگر استفاده از پردازشگرهای موازی. آنچه که همواره استفاده از پردازشگرهای موازی را محدود می‌کند کارایی آنها نیست. که به ماهیت مسأله و شیوه تجزیه آن به مسائل کوچک و مستقل می‌باشد. بدیهی است که هرچه قسمت‌های مجزا و مستقل یک مسأله بیشتر باشد میزان کارایی الگوریتم موازی نیز بیشتر خواهد بود. از این‌رو به بررسی کیفیت روش محاسباتی براساس شاخص‌های مورد قبول یعنی کارایی و سرعت الگوریتم می‌پردازیم. در هر دو مورد روش موازی با روش متوالی مقایسه می‌شود. در این قسمت از اصطلاحات زیر استفاده می‌کنیم.

۱- $T_{(p)}$ زمان مورد نیاز برای حل مسأله با بکارگیری p پردازشگر (روش موازی)

۲- $T_{(۱)}$ زمان مورد نیاز برای حل مسأله با بکارگیری ۱ پردازشگر (روش متوالی)

در این موارد منظور از زمان همان مدت زمانی است که CPU مشغول است به‌علاوه زمانی که صرف انتقال اطلاعات بین پردازشگرها می‌شود.

با توجه به موارد فوق در شاخص عمده کارایی و سرعت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱: کارایی الگوریتم

کارایی الگوریتم را که با E نمایش می‌دهیم عبارت است از نسبت زمان روش متوالی به p برابر زمان روش موازی وقتی که p پردازشگر به کار گرفته شده است یعنی

$$E = \frac{T_{(1)}}{pT_{(p)}}$$

عدد کارایی میزان بهره‌مندی و بهره‌وری مفید از پردازشگرها را نشان می‌دهد. این شاخص مبین مطلوبیت تجزیه مسأله و توانمندی در به کارگیری پردازشگرها را نشان می‌دهد. در بهترین حالت $E = 1$ خواهد بود که نشان‌دهنده کارایی ۱۰۰٪ می‌باشد.

تعریف ۲: سرعت الگوریتم

سرعت الگوریتم را که با S نمایش می‌دهیم عبارت است از میزان کاهش در زمان محاسبات وقتی که به جای یک پردازشگر از p پردازشگر استفاده می‌کنیم یعنی

$$S = EP$$

این شاخص میزان صرفه‌جویی در وقت و چگونگی تسریع در حل مسأله را نشان می‌دهد. در بهترین حالت S برابر P می‌باشد که نشان می‌دهد پردازشگر اضافی کاملاً به کار گرفته می‌شود.

نتایج محاسبات که از به کارگیری تعدادی PC (۵ عدد پنتیوم ۵۰۰) و نرم‌افزار PVM می‌باشد در

جدول ۲(زمان پردازش)		
مرحله	موازی	سری
۱ (IP)	۵۸۳۰۶	۲۷۷۶۴۸
۲و۳ (LP)	۷۰۷۱۰	۳۴۶۶۲۱

جدول ۲ و ۳ ارائه شده است در این روش داده‌های مورد نیاز روی همه PCها قرار داده شده است و فقط نتایج بین آنها ردوبدل می‌شود. توپولوژی به کار گرفته شده نیز یک توپولوژی اصلی و فرعی Master/Slave می‌باشد که گام‌های الگوریتم و وظایف هر پردازشگر فرعی روی گروهی از سناریوها کار می‌کند و در صورت نیاز اطلاعات ضروری را از پردازشگر اصلی دریافت یا به آن ارسال می‌کند.

جدول ۳(کارائی)		
مرحله	E	S
۱ (IP)	۰/۹۵	۴/۷۵
۲و۳ (LP)	۰/۹۸	۴/۹۰

۶ الگوریتم های پردازش موازی

۶-۱ الگوریتم مرحله اول با تعیین جواب استراتژیک

وظایف پردازشگر اصلی

- ورود داده‌های مسأله
- ارسال داده‌ها برای پردازشگرهای فرعی
- ورود میزان تقاضا نظیر هر سناریو
- تقسیم سناریوها به N گروه و ارسال آن به پردازشگرهای مربوطه
- محاسبه جواب استراتژیک برای گروه اول
- حل مسأله با/ بدون پایه اولیه
- ذخیره جواب استراتژیک سناریوی جاری
- دریافت جواب استراتژیک از پردازشگرهای فرعی

وظایف پردازشگر فرعی شماره n

- دریافت داده‌ها از پردازشگر اصلی
- دریافت میزان تقاضا برای سناریوهای گروه n
- محاسبه جواب استراتژیک برای گروه n
- حل مسأله با / بدون پایه اولیه
- ذخیره پایه در صورت ضرورت
- ذخیره جوای استراتژیک سناریوی جاری
- ارسال جواب استراتژیک به پردازشگر اصلی

۶-۲ الگوریتم مرحله دوم، ارزیابی جواب‌های استراتژیک

وظایف پردازشگر اصلی

- ورود داده‌های مسأله
- ارسال داده‌ها برای پردازشگرهای فرعی
- ورود جواب‌های استراتژیک موجود
- ارسال جواب‌های استراتژیک برای کلیه پردازشگرهای فرعی
- ارسال میزان تقاضا در سناریوهای گروه n برای پردازشگر فرعی n

- محاسبه جواب کلی نظیر هر جواب استراتژیک و هر سناریو
- تنظیم تقاضا
- تنظیم جواب استراتژیک
- حل مسأله
- ذخیره جواب

وظایف پردازشگر فرعی شماره n

- دریافت داده‌های مسأله
- دریافت جواب‌های استراتژیک
- دریافت میزان تقاضا در سناریوهای گروه n
- محاسبه جواب کلی نظیر هر جواب استراتژیک و هر سناریو
- تنظیم تقاضا
- تنظیم جواب استراتژیک
- حل مسأله
- ذخیره جواب

۷ بررسی نتایج

نتایج بدست آمده نشان می دهد که الگوریتم از کارایی وسرعت مناسبی برخوردار است وبدون تغیرات بیشتری می توان بسرعت نسبت به افزایش سناریو ها اقدام و در زمان مناسب جواب مساله را بدست آورد بدون اینکه لازم باشد تغییرات اساسی در برنامه یا الگوریتم داد. در این بررسی نشان دادیم که چگونه می‌توان تصمیم گیرندگان را مجهز به ابزاری کرد که با کمترین زحمت بتوانند مسائل بزرگ را بررسی و به یک جواب اولیه رسیده و محاسبات و تصمیمات خود را بر این اساس منطقی‌تر و واقعی‌تر گردانند. اکنون با توجه به نتایج می‌توان ادعا نمود که مشکل اصلی در این مرحله یافتن راهی برای حل مساله فرعی IP است که در روش‌های تجزیه از قبیل روش آزادسازی لاگرانژ بدست می‌آید. انتظار می رود که دوباره استفاده از الگوریتم‌های پردازش موازی بتواند زمان حل این قسمت ازمساله را نیز کاهش دهد.

۸ مراجع

1. Baricelli, C. Lucas, E. Messina, G. Mitra. (1997), "A Model for Strategic Planning Under Uncertainty", in TOP, Journal of the Spanish OR Society, V.4, N2, pp 361-384.
2. Beasley, J. E. (1993),"Lagrangean Relaxation, Modern Heuristic Techniques for Combinational Problems",Ed. Colin R.Reeves.
3. Bender. J.F. (1962), "Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems". Numerishe Mathematik 4, p238-252.
4. Bienstock D. and Shapiro J.F. " Optimising resource acquisition decisions by stochastic programming " , Management science 34(2),(1984)
5. Bloom J. A. (1983), "Solving an electricity generating capacity expansion planning problem by generalized Bender's decomposition", Operation research Vol. 31, No.1, p84-100.
6. Brown G. G., Grave G. W. and Honzarenko M. D.(1987) ,"Design and operation of a multicommodity production/ distribution system using primal goal decomposition", Management Science 33/11, p1469-1480.
7. Caroe C. C., and Schiltz R., (1997)."Dual decomposition in stochastic integer programming", Preprint SC 96-46, Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin. Submitted to Operations Research Letters.
8. Cheung R. K. M. and Powell. W. B. (1999), "Models and algorithms for distribution problems with uncertain demands". Transportation science vol. 30, No. 1, p43-59.
9. Cohen M. A. and Lee H. L. (1988), "Strategic analysis of integrated production distribution systems: models and methods", Operations Research 36, p216-228.
10. Cohen M. A. and Lee H. L. (1989), "Resource deployment analysis of global manufacturing and distribution networks", Journal of Manufacturing and Operations Management 2, p81-104.
11. Dantzig G.B. and Wolfe P.(1960) "Decomposition Principle for Linear Programs" Operations Research 8, p101-111.
12. Escudero L.F., Kameesam P. V., King A. and Wets J.B.,(1993) "Production planning via scenario modelling" , Annual of Operations Research.vol.43, p311-335.
13. Ellison, E.F.D., Hajian M., Levkovitz, R., Maros, I., Mitra, G. (1995) "A Fortran based Mathematical Programming System: FortMP", Brunel university and NAG Ltd.
14. Gary D. Eppen G. D., Martin R. K. and Schrage L. (1989), "A Scenario Approach to capacity planning", Operational Research, Vol. 37(4), p517-525.
15. Geoffrion. A.M. (1970), "Elements of Large-scale Mathematical Programming". Mathematical Science Vol. 16 No. 11, p652-690.
16. Geoffrion A.M. and Graves G.W.(1974), "Multicommodity distribution system design by Bender's decomposition", Management Science 20/5, p822-844.
17. Geoffrion A.M. and McBride, (1972) "The capacity facility location problem with additional constraints". Paper presented to join National Meeting of AIIE, ORSA, and TIMS, Atlantic City, November 8-12.
18. Guignard, M., (1988),"A Lagrangean dual ascent algorithm for simple plant location problems", European Journal of Operational Research, vol. 35, p193-200.

19.Held M., and Karp R. M., (1971)."The Travelling salesman problem and minimum spanning Trees", Part II. Mathematical Programming, vol. 1, p6-25.
20.Higle J.L.and Sen S. " Stochastic Decomposition: A stochastical method for large scale stochastic linear programming" ,Kluwer Academic Publisher, Dordrecht,(1996).
21.MirHassani S.A., Lucas C.,and Mitra G. (1997).'Supply Chain Planning under Uncertainty', Editor E. Hadjiconstantinou, Published by Springer Verlag & UNICOM
22.MirHassani S.A., Lucas C., Mitra G., Messina E., and Nagar A. (1998). "Computational Solution of Capacity Planning Models under Uncertainty". Technical Report TR/05/98, Department of Maths and Stats. Brunel University UK, To appear in special issue of the Parallel Computing Journal.
23.Rockafellar R.T.and Wets R.J. " Scenario and policy aggregation in optimization under uncertainty " , Mathematics of Operation Research, 16, p119-147,(1991).
24.Thomas D.J., Griffin P.M. ' Coordinated supply chain management' European Journal of operational Research 94(1996) 1-15.
25.Van Slyke R. and Wets R.J-B (1969), "L-shaped linear programs with application to optimal control and stochastic programming", SIAM Journal on Applied Mathematics 17, p638-663.
26.Wagner, J.M. and Berman O.(1995) "Models for planning capacity expansion of convenience store under uncertain demand and the value of information" Annals of Operations Research 59, p19-44.
27.Wollmer R.D. (1980), "Two stage linear programming under uncertainty with 0-1 integer first stage variables". Mathematical Programming 19, p279-288.