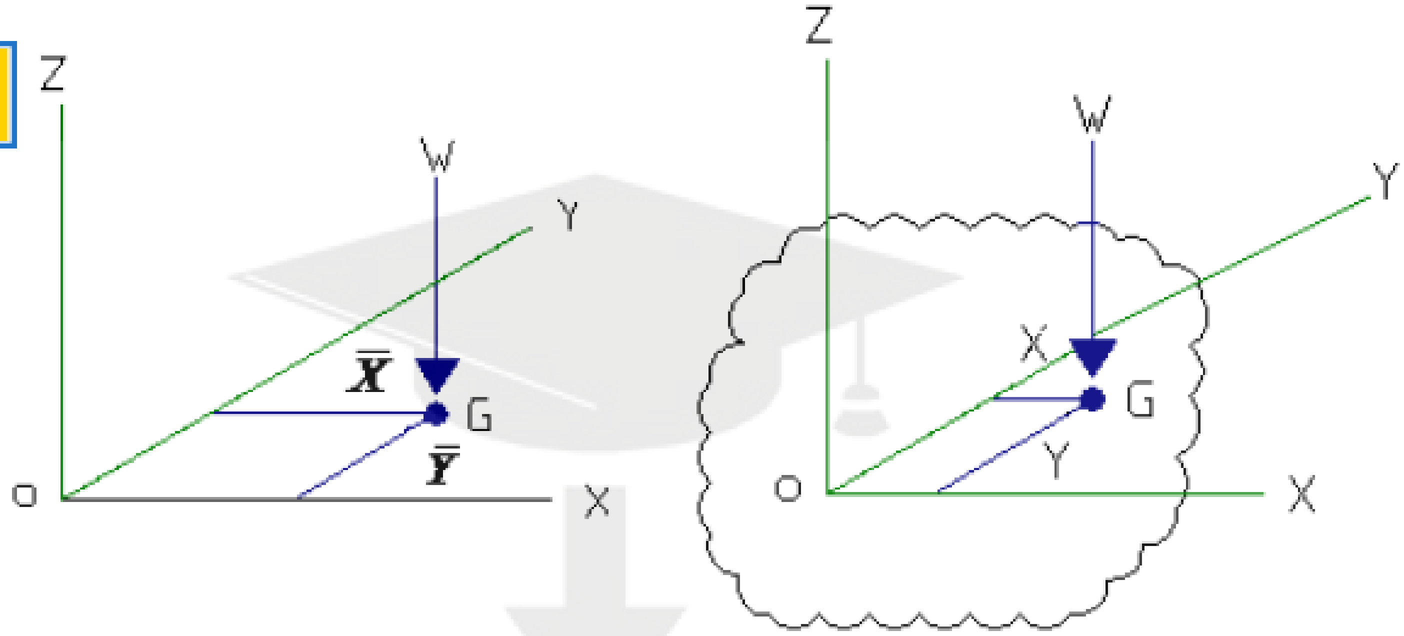
دانشگاه صنعتی شاهرود

نیروهای گسترده و مرکزهای هندسی وگرانی

مرکز ثقل سطوح :

مثلا در فصل های قبلی گفتیم که وزن یک جسم را که نیرویی است که بر آن جسم وارد می شود می توانیم بصورت   یک نیروی تنها در یک نقطه قرار دهیم. این نیرو کلا بصورت بار گسترده ای است که بر آن جسم وارد می شود، ولی می توان به جای آنها از سیستم نیروی معادل استفاده کرد و تمام آن و یا برآیند آنها را در یک نقطه که به آن نقطه مرکز ثقل می نامیم قرار دهیم.



مختصات مرکز ثقل جسم دو بعدی نسبت به دستگاه X,Y,Z

مختصات مرکز ثقل جسم دو بعدی نسبت به دستگاه **X,Y,Z**

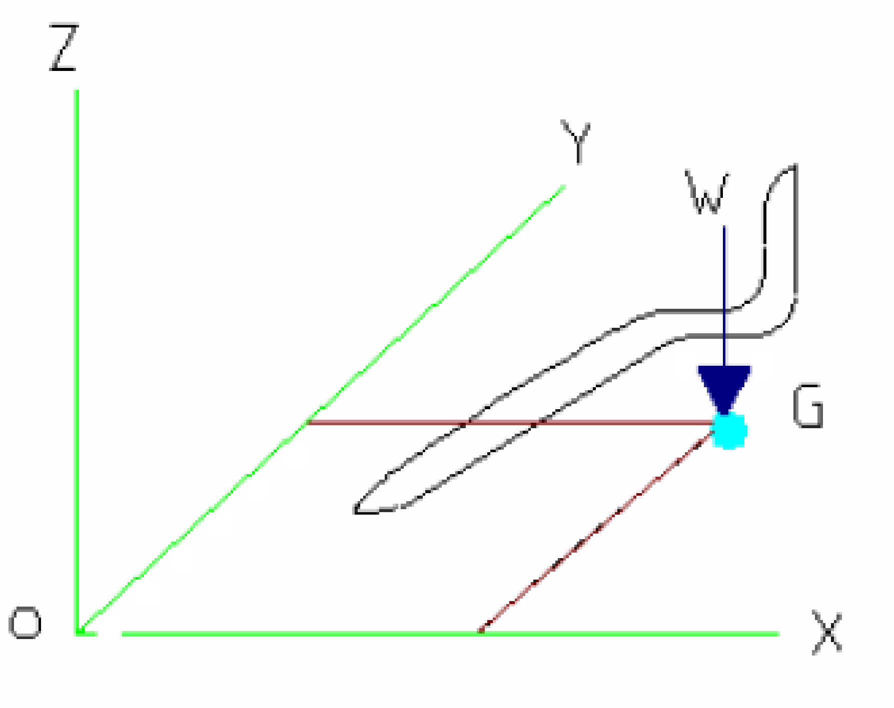
$$W = \sum \Delta w_i = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \Delta w_3 + \cdots + \Delta w_n$$

$$\bar{X}W = x_1 \Delta w_1 + x_2 \Delta w_2 + x_3 \Delta w_3 + \cdots + x_n \Delta w_n = \sum x_i \Delta w_i$$

$$\bar{Y}W = y_1 \Delta w_1 + y_2 \Delta w_2 + y_3 \Delta w_3 + \cdots + y_n \Delta w_n = \sum y_i \Delta w_i$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \Delta w_i}{w}, \bar{Y} = \frac{\sum y_i \Delta w_i}{w}, W = \sum \Delta w_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int x dw}{w}, \bar{Y} = \frac{\int y dw}{w}, W = \int dw$$



$$G(X, Y) = (\overline{X}, \overline{Y})$$

مراکز سطوح و خطوط :

هنگامیکه جسمی در یک صفحه دارای ضخامت یکنواخت و جنس هموژنیس و یا یکسان (همگن) باشد می توان نوشت :

$\gamma =$ وزن مخصوص $t =$ ضخامت $\Delta A =$ مساحت $\Delta W = \gamma . t . \Delta A$

$$W = \int dw = \int \gamma . t . \Delta A = \gamma . t \int dA$$

$$A = \int dA$$

$$\int x dw = \int x \gamma . t dA = \gamma . t \int x dA$$

$$\int y dw = \int y \gamma . t dA = \gamma . t \int y dA$$

$$\bar{X} = \frac{\int x dw}{W} = \frac{\int x dA}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int y dw}{W} = \frac{\int y dA}{A}$$

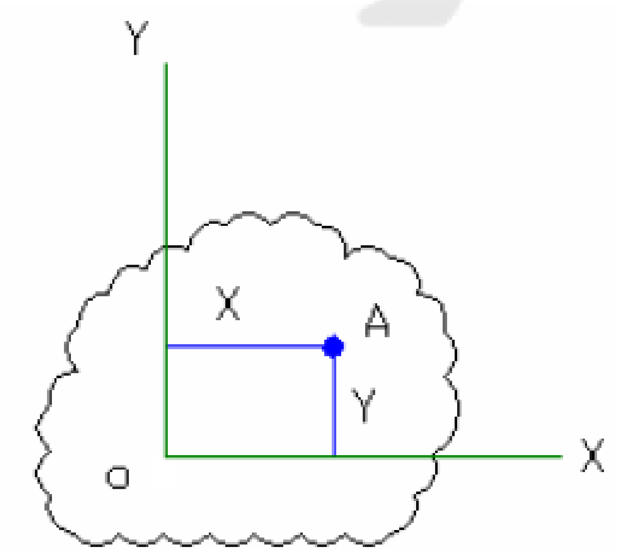
مرکز سطح یک جسم دو بعدی نسبت به دستگاه مختصات X,Y,Z

پس اگر یک جسمی دو بعدی دارای ضخامتی یکنواخت و جنس همگنی باشد، نقطه مرکز سطح با نقطه مرکز ثقل در یک نقطه قرار می گیرد.

$\int xdA =$ گشتاور مساحت A نسبت به محور y می نامند

$\int ydA =$ گشتاور مساحت A نسبت به محور x می نامند

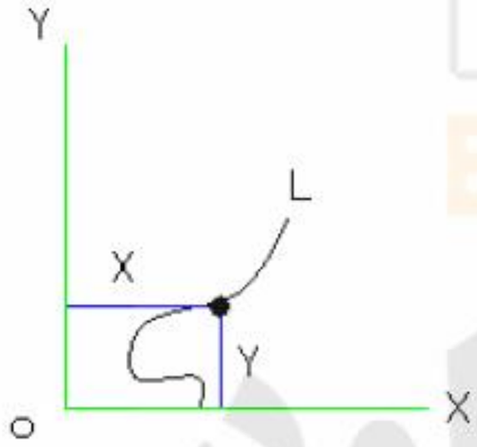
$$C(X,Y) = (\overline{X}, \overline{Y})$$

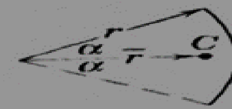
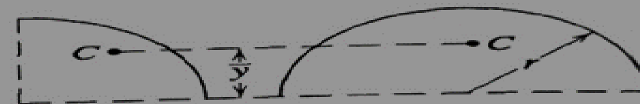
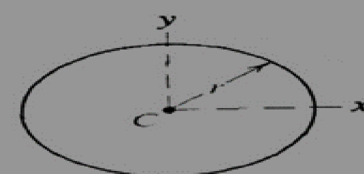
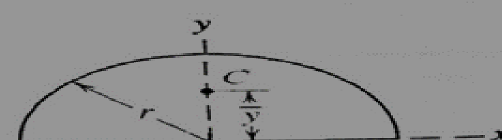


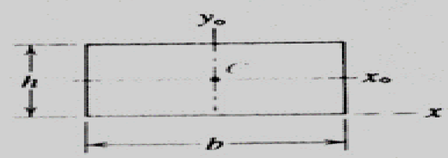
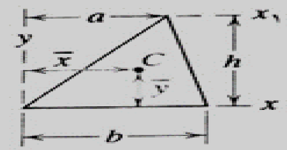
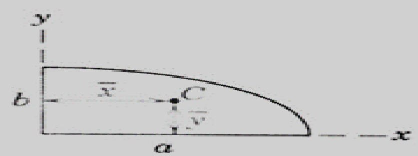
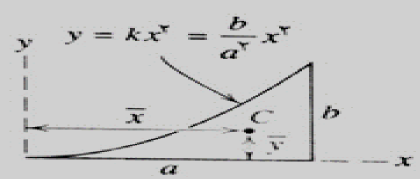
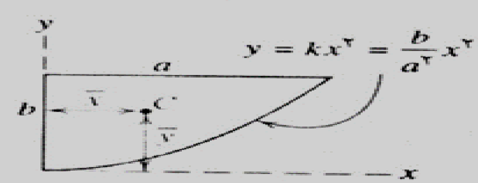
برای مفتول یا سیم

γ = وزن مخصوص   a = مساحت سطح مقطع سیم ΔL = طول $\Delta W = \gamma . a \Delta L$

$$\overline{X} = \frac{\int x dL}{L}, \overline{Y} = \frac{\int y dL}{L}$$

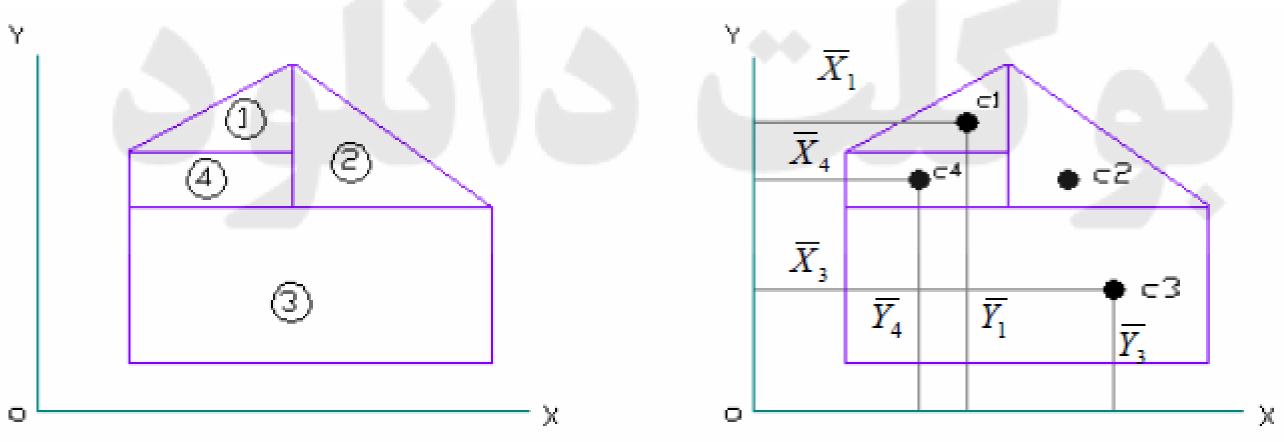


شکل	مرکز هندسی
کمانی از دایره 	$\bar{r} = \frac{r \sin\alpha}{\alpha}$
کمانهای ربع‌دایره و نیمدایره 	$\bar{y} = \frac{۲r}{\pi}$
سطح دایره 	—
سطح نیمدایره 	$\bar{y} = \frac{۴r}{۳\pi}$
سطح ربع‌دایره 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{۴r}{۳\pi}$
سطح قطاعی از دایره 	$\bar{x} = \frac{۲}{۳}\frac{r \sin\alpha}{\alpha}$

—	سطح مستطیل 
$\bar{x} = \frac{a+b}{۳}$ $\bar{y} = \frac{h}{۳}$	سطح مثلث 
$\bar{x} = \frac{۴a}{۳\pi}$ $\bar{y} = \frac{۴b}{۳\pi}$	سطح ربع‌بیضی 
$\bar{x} = \frac{۳a}{۴}$ $\bar{y} = \frac{۳b}{۱۰}$	سطح زیر سهمی $A = \frac{ab}{۳}$ 
$\bar{x} = \frac{۳a}{۸}$ $\bar{y} = \frac{۳b}{۵}$	سطح سهمی $A = \frac{۲ab}{۳}$ 

سطوح و خطوط مختلط :

در خیلی از موارد یک جسم دو بعدی و یا یک خط از چندین مقطع مختلط تشکیل می شود مانند دایره و مستطیل و یا مثلث . در اینگونه موارد می توان آن سطح را به اشکال منتظم هندسی تقسیم کرد و از روابط گذشته استفاده کرد و مرکز سطح را بدست آورد.



$C_1 =$ مرکز سطح قسمت یک

$C_2 =$ مرکز سطح قسمت دو

$C_3 =$ مرکز سطح قسمت سه

$C_3 =$ مرکز سطح قسمت چهار

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\bar{X}_1 A_1 + \bar{X}_2 A_2 + \bar{X}_3 A_3 + \bar{X}_4 A_4 = \bar{X} A$$

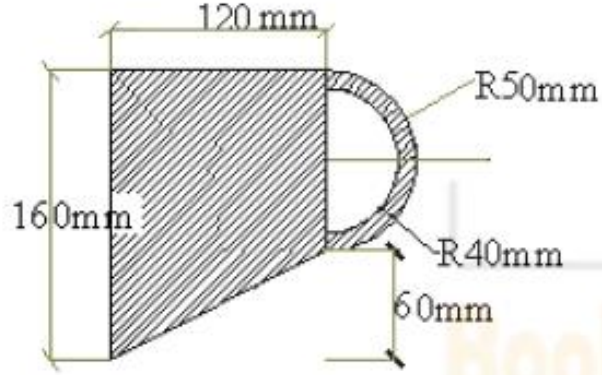
$$\bar{Y}_1 A_1 + \bar{Y}_2 A_2 + \bar{Y}_3 A_3 + \bar{Y}_4 A_4 = \bar{Y} A$$

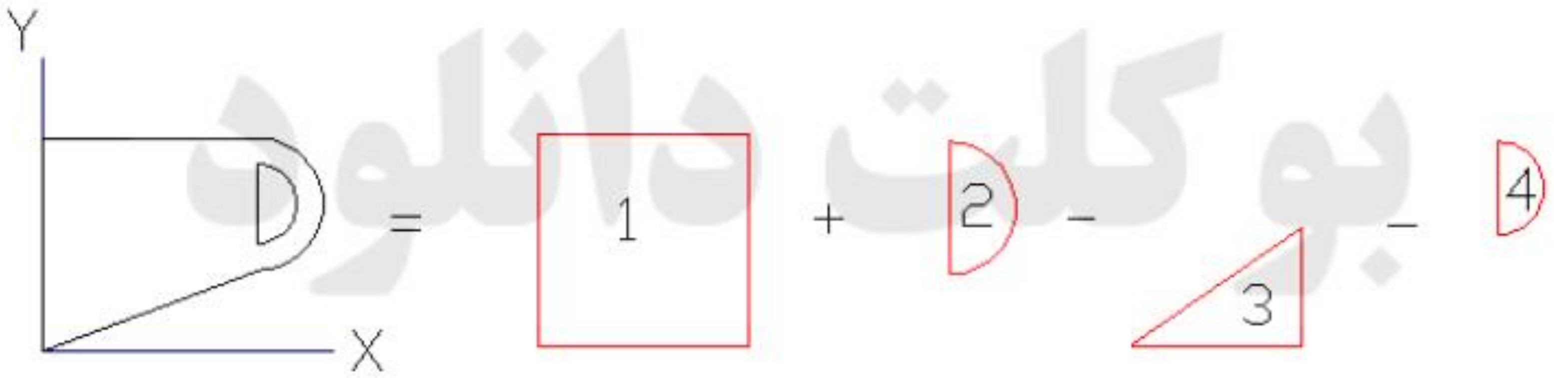
$$A = \sum A_i$$

$$\bar{X} = \frac{\int \bar{x}_i \, dA_i}{A}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int \bar{y}_i \, dA_i}{A}$$

مثال: مختصات مرکز سطح شکل زیر ا بدست آورید.

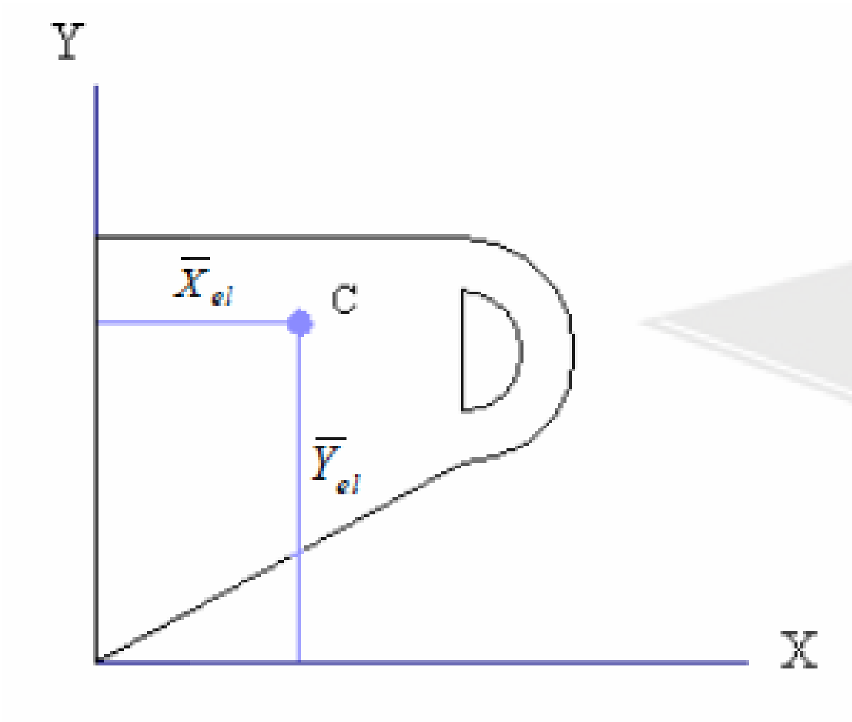




قسمت	علامت	(mm^2) A	$\bar{X}_i$	$\bar{Y}_i$	AX_i	AY_i
1	+	120×160=19.200	60	80	1,152,000	1,536,000
2	+	$\frac{\pi.(50)^2}{2}=3927$	$120+\frac{40(50)}{3\pi}=140$	110	553,707	431,970
3	−	$\frac{120\times160}{2}=3600$	80	20	-288,000	-72,000
4	−	$\frac{\pi.(40)^2}{2}=2513$	$120+\frac{4(40)}{3\pi}=137$	110	-344,281	-276,430
کل		17140			1,073,426	1,614,540

$$\bar{X} = \frac{\sum Ax_i}{\sum A_i} = \frac{1073426}{17140} = 62.6(mm)$$

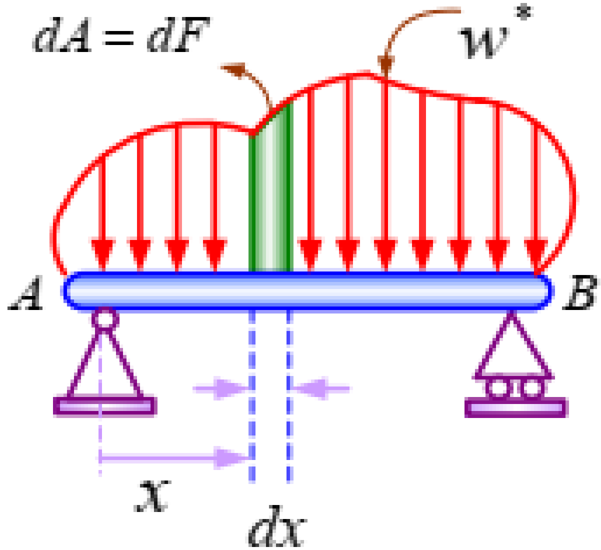
$$\bar{Y} = \frac{\sum Ay_i}{\sum A_i} = \frac{1619540}{17140} = 94.5(mm)$$



مرکز نیرو

w^* شدت نیرو درواحد طول ← نیروی توزیعی در واحد طول

واحد آن در دستگاه (M K S) N/m است.

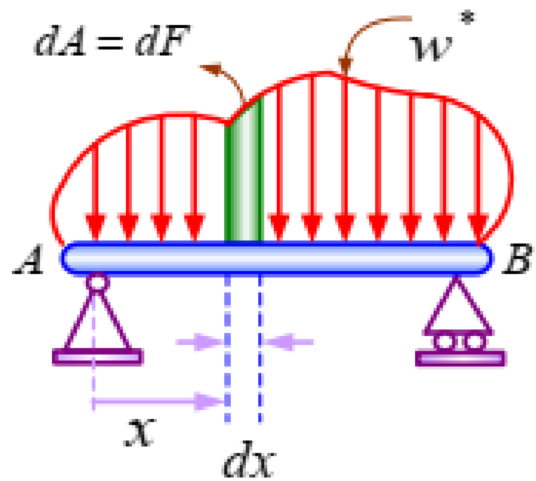


(شدت نیرو) $w^* = w^*(x)$

$$dF = dA = w^*(x)dx$$

$$F = A = \int w^*(x)dx$$

سطح زیر منحنی تغییرات شدت نیرو برحسب طول تیر



$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dF}{\int dF}$$

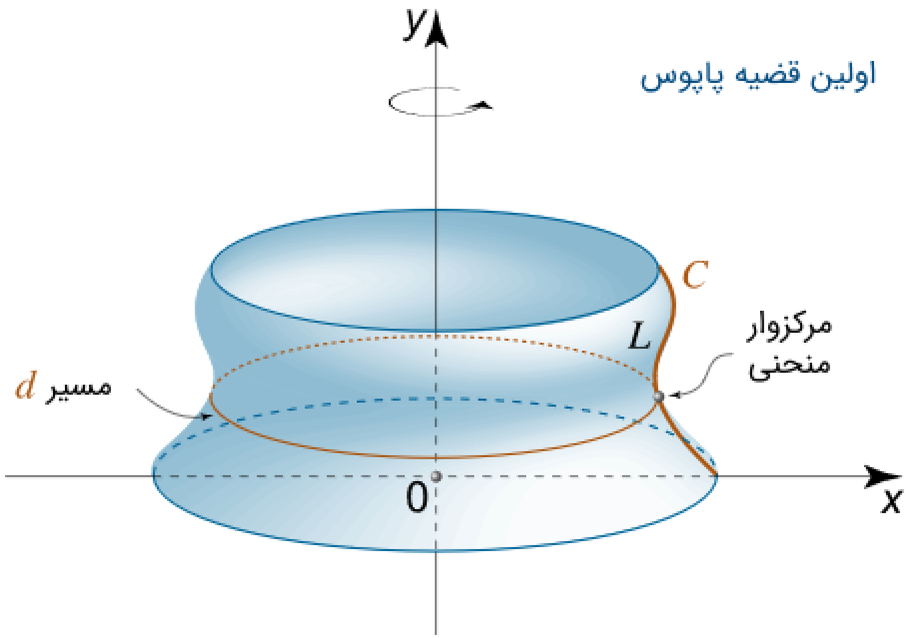
$$dF = dA = w^*(x)dx$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int x\,dF}{\int dF} = \frac{\int x w^*(x)\,dx}{\int w^*(x)\,dx}$$

قضایای پاپوس گلدینوس(Popus Goldinus)

اولین قضیه پاپوس بیان می‌کند که مساحت رویه A که از دوران منحنی C حول محور غیرمتقاطع واقع در صفحه آن به دست آمده است، برابر با حاصل‌ضرب طول L منحنی در فاصله d است که توسط مرکزوار C پیموده شده است:

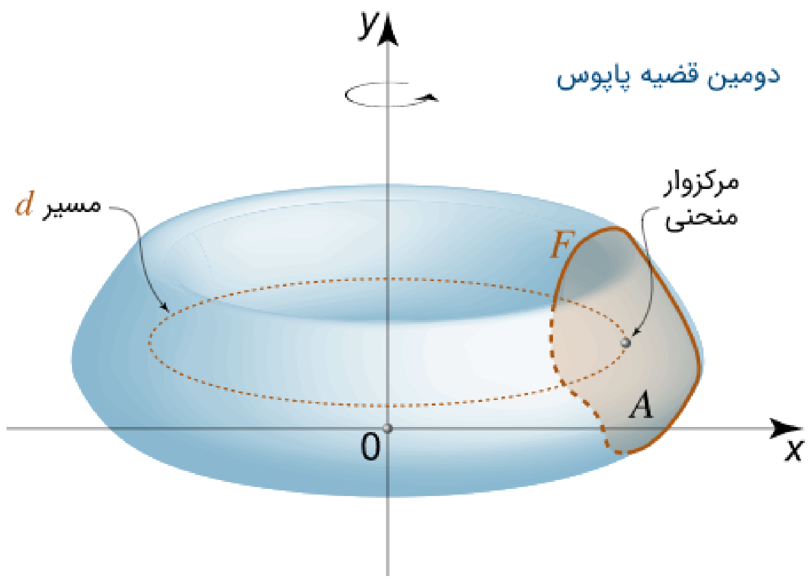
$$A = Ld.$$



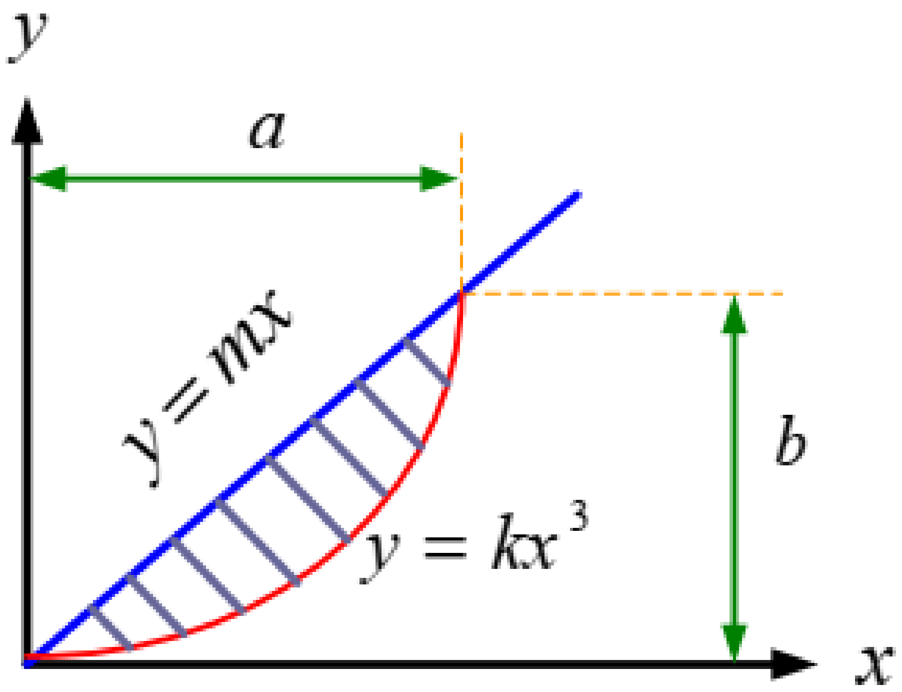
قضیه پاپوس برای محاسبه حجم حاصل از دوران

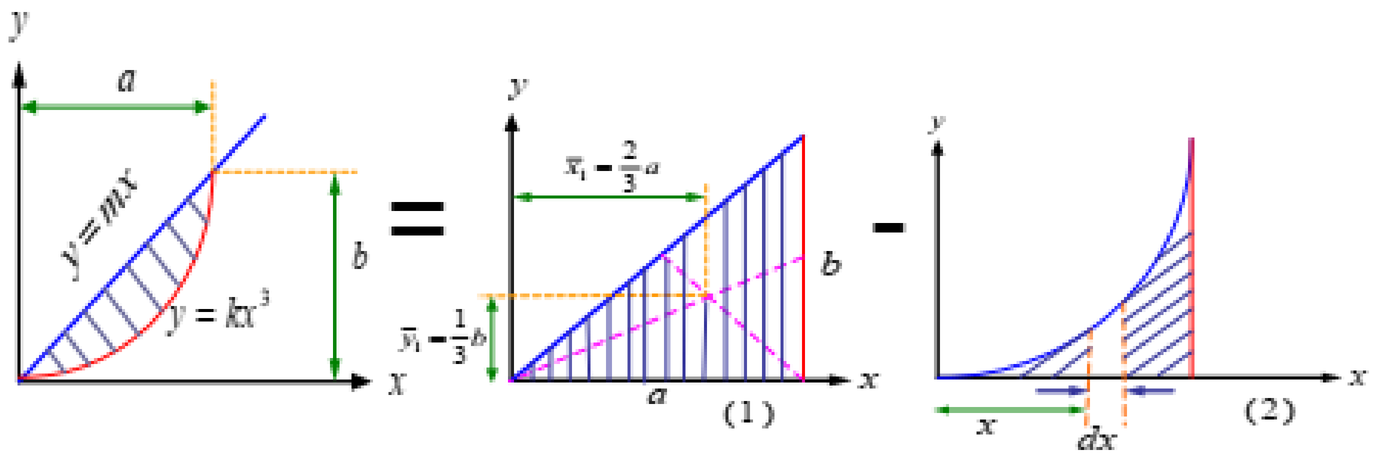
دومین قضیه پاپوس بیان می‌کند که حجم فضای حاصل از دورانِ لایه F حول یک محور غیرمتقاطع با آن در همان صفحه، برابر است با حاصل‌ضرب مساحت A لایه F در مسافت d پیموده شده توسط مرکزوار F:

$$V = Ad.$$



مثال: برای سطح هاشور خورده مطابق شکل مختصات مرکز سطح را مشخص کنید.

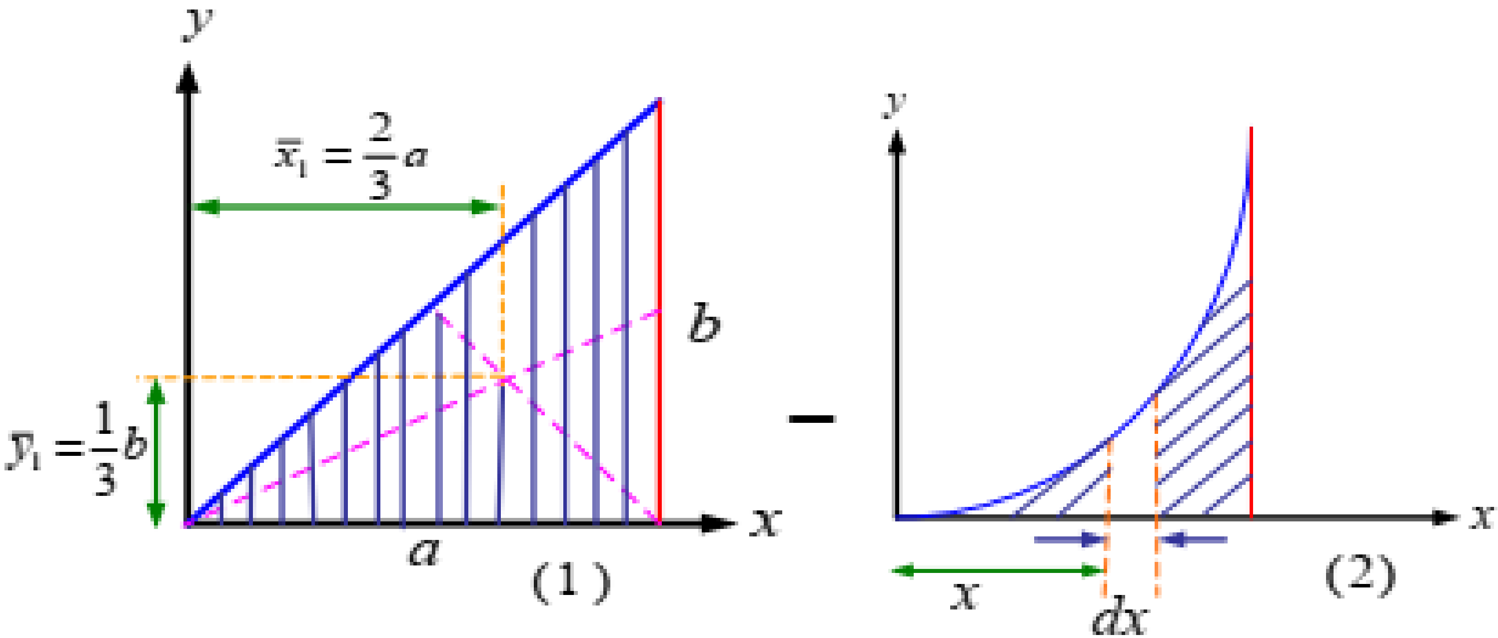




(1) $$A_1 = \frac{ba}{2}$$

(2) $$: b = ka^3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{b}{a^3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a^3}x^3 \quad dA = ydx$$

$$\int dA = \int ydx = \int_0^a \frac{b}{a^3}x^3 dx = \frac{b}{a^3} \times \frac{1}{4} \times a^4 = \frac{1}{4}ab \qquad A_2 = \frac{ba}{4}$$



$$\int xdA = \int x_{el}dA = \int xydx = \frac{b}{a^3}\int_0^a x^4 dx = \frac{b}{a^3}\left(\frac{1}{5}\right)a^5 = \frac{1}{5}a^2 b$$

$$\int ydA = \int y_{el}dA = \int \frac{1}{2}ydA = \frac{1}{2}\int y^2 dx = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^6}\int_0^a x^6 dx = \frac{1}{14}ab^2$$

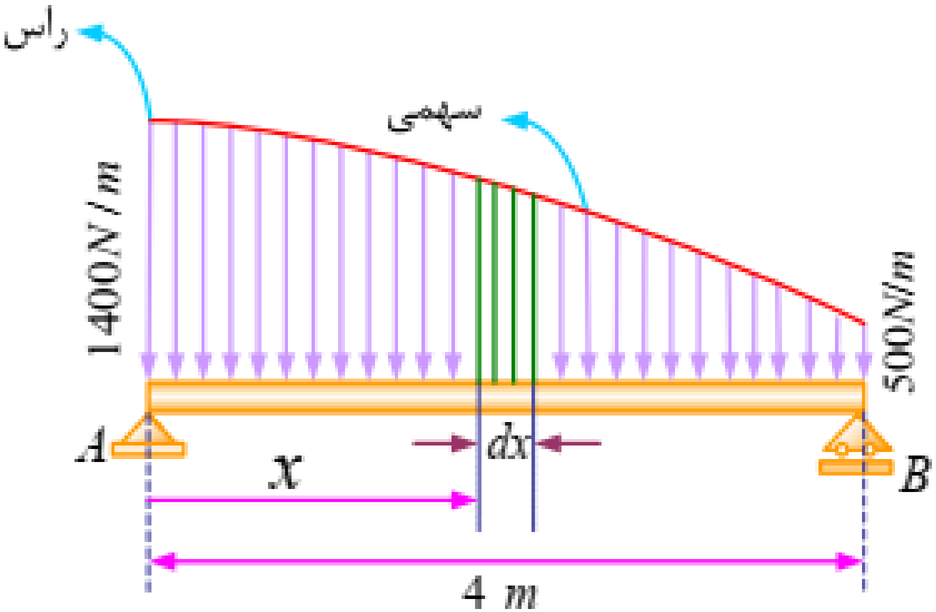
$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int x_{el} dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\int y_{el} dA}{\int dA}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\frac{1}{5} a^2 b}{\frac{1}{4} ab} = \frac{4}{5} a \qquad \bar{y}_2 = \frac{\frac{1}{14} b^2 a}{\frac{1}{4} ab} = \frac{2}{7} b$$

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \bar{x}_1 - A_2 \bar{x}_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{a^2 b}{3} - \frac{2 a^2 b}{15}}{\frac{ab}{2} - \frac{ab}{4}} = \frac{8}{12} a$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \bar{y}_1 - A_2 \bar{y}_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{ab^2}{6} - \frac{ab^2}{28}}{\frac{ab}{2} - \frac{ab}{4}} = \frac{8}{21} b$$

مثال: مطلوبست تعیین بزرگی و نقطه اثر نیروی توزیعی وارد بر تیر نشان داده شـده در شکل و هم چنین تعیین نیروهای عکس العمل در نقاط **A** و **B**.



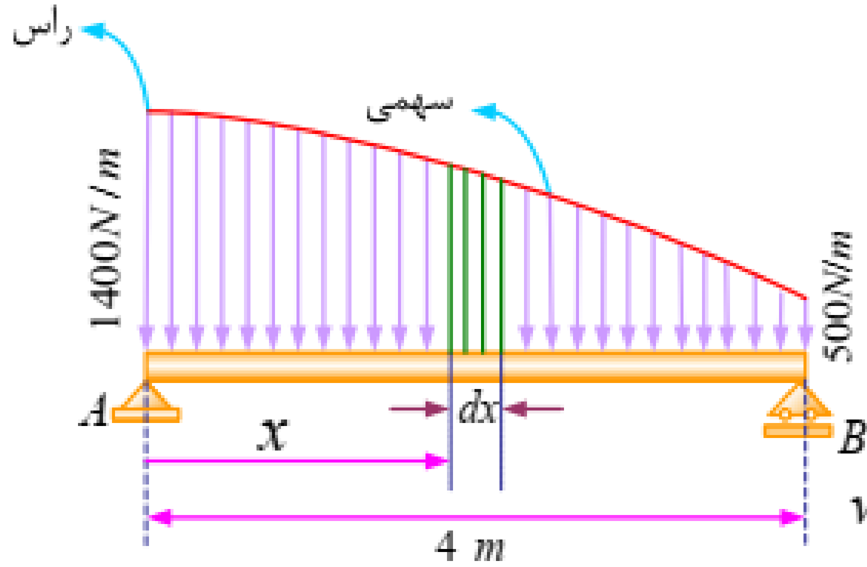
$$y = ax^2 + bx + c$$

نسبت به محور y متقارن است

$$y = ax^2 + c$$

$$\begin{cases} 1400 = a \times (0) + c \\ 500 = a \times 16 + c \end{cases}$$

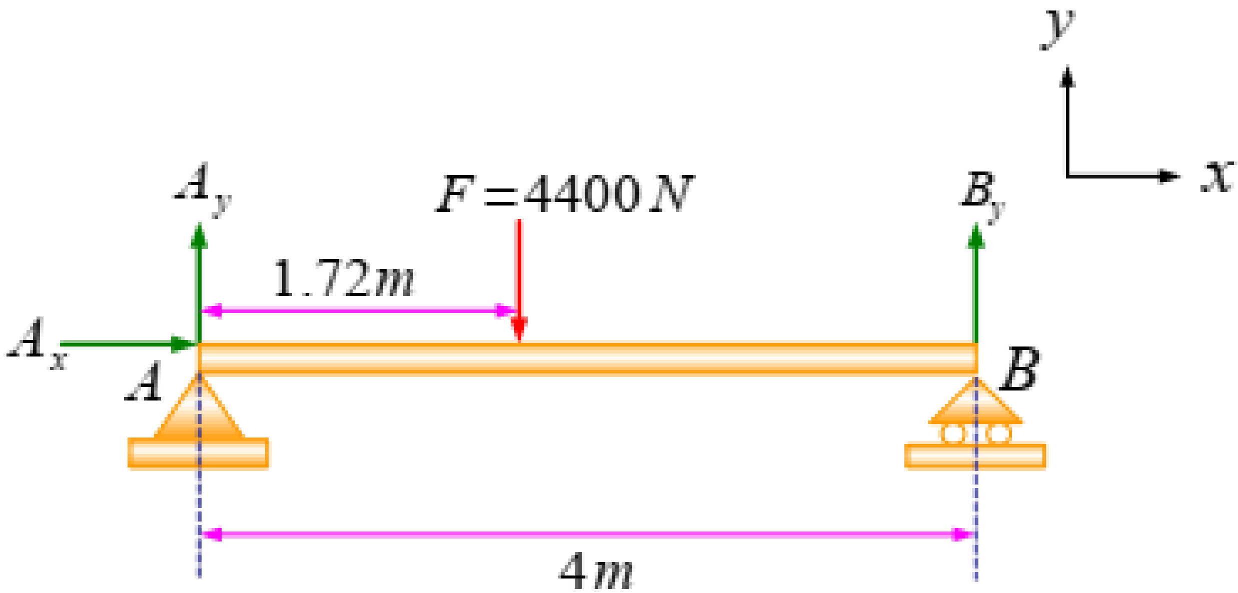
$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1400 \\ 16a = -900 \rightarrow a = -\dfrac{225}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow y = -\frac{225}{4}x^2 + 1400$$



$$w^* = y = -\frac{225}{4}x^2 + 1400$$

$$F = A = \int y\,dx = \int w^*(x)\,dx = \int_0^4 \left(-\frac{225}{4}x^2 + 1400\right)dx = 4400\,N$$

$$\bar{x} = \frac{\int x w^*(x)\ dx}{\int w^*(x)\ dx} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{\int_0^4 x\left(-\frac{225}{4}x^2 + 1400\right)dx}{4400} = 1.72\,m$$



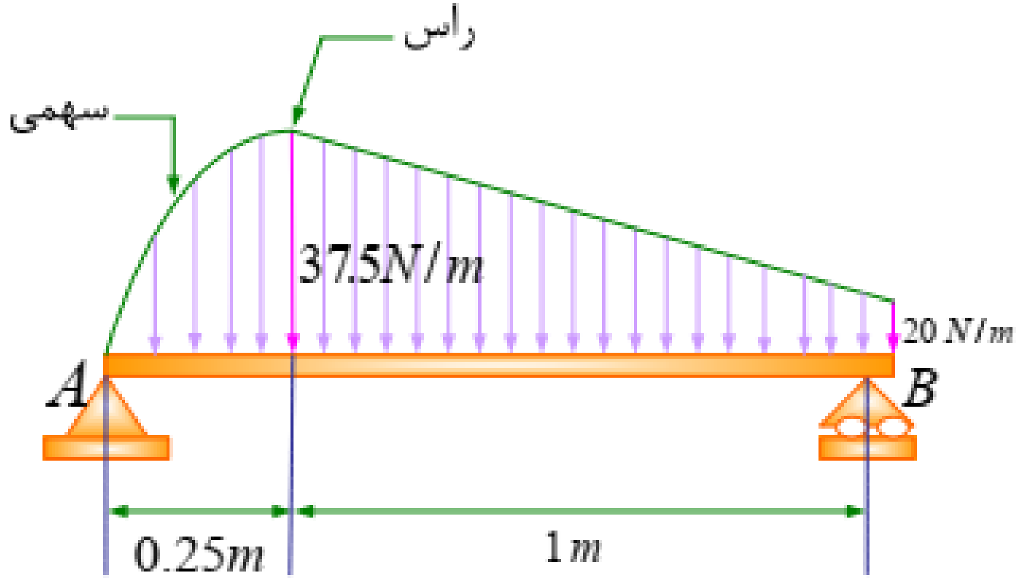
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow A_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \;\Rightarrow -4400 + B_y + A_y = 0$$

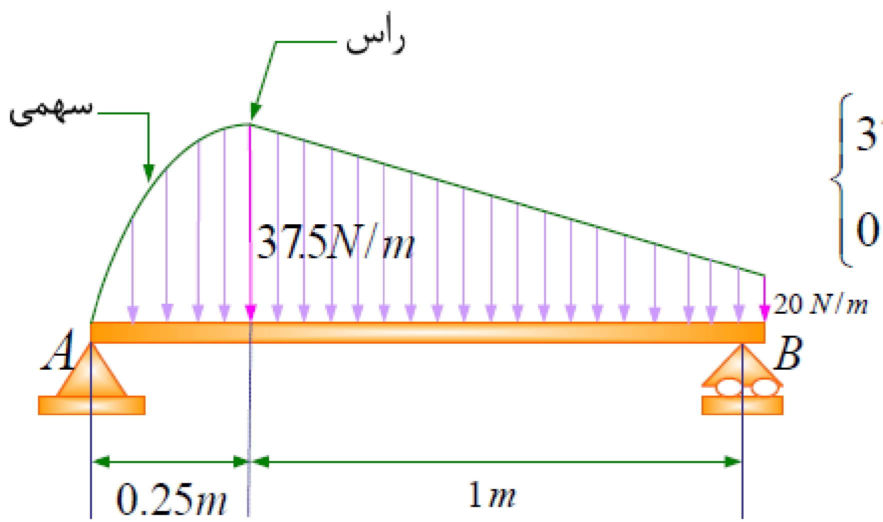
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4400 \times 1.72 - 4B_y = 0$$

$$B_y = 1892\ N$$

$$A_y = 2508\ N$$

مثال: برای تیر مطابق شکل که تحت تأثیر نیروی توزیعی قـرار دارد، مؤلفـه های عکس العمل را در تکیه گاههای A و B تعیین کنید.





$$y = ax^2 + bx$$

$$\begin{cases} 37.5 = a(0.25)^2 + b(0.25) \\ 0 \quad = a(0.5)^2 + b(0.5) \end{cases}$$

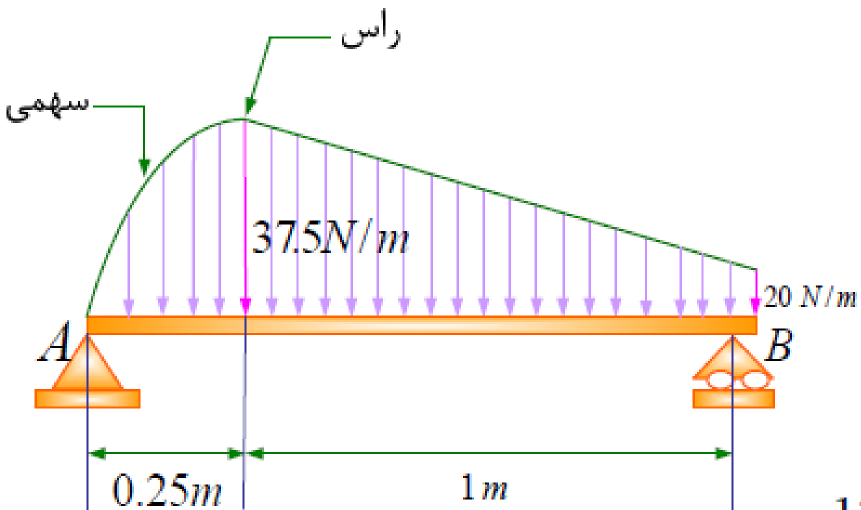
$$a = -600 \quad , \quad b = 300$$

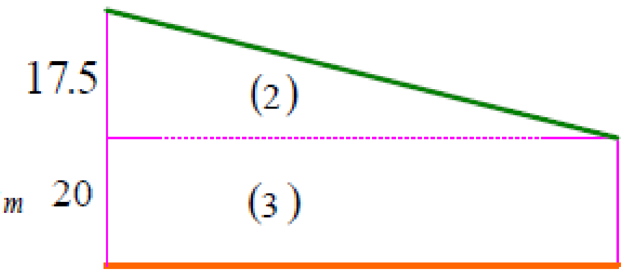
$$w(x) = -600x^2 + 300x$$

$$A_1 = \int w(x)\ dx = 300\int_0^{0.25} \left(-2x^2 + x\right)\ dx = 6.255N = F_1$$

$$\int xdA = \int xw(x)\ dx = 300\int_0^{0.25} \left(-2x^3 + x^2\right)\ dx = 0.977$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\int xw(x)dx}{\int w(x)dx} = \frac{\int xdA}{\int dA} = \frac{0.977}{6.225} = 0.156\ m$$

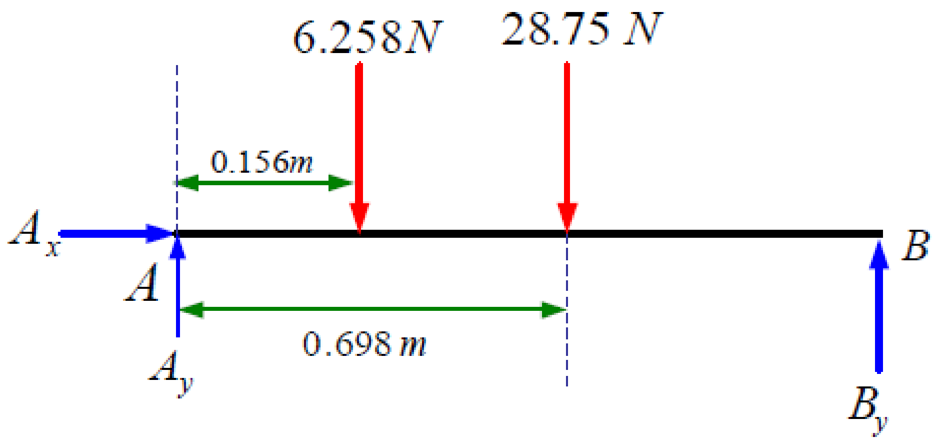




$$A_2 = \frac{17.5 \times 1}{2} = 8.75N \qquad \bar{x}_2 = \frac{1}{3}m$$

$$A_3 = 1 \times 20 = 20 \qquad \bar{x}_3 = \frac{1}{2}m \qquad x_2^* = \frac{A_2\bar{x}_2 + A_3\bar{x}_3}{A_2 + A_3} = 0.448\,m$$

$$A_2^* = A_2 + A_3 = 28.75\,N$$



$$A_1 = 6.25\,N = F_1$$

$$\bar{x}_1 = 0.156\ m$$

$$A_2^* = A_2 + A_3 = 28.75$$

$$x_2^* = 0.448\,m$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$1.25 \times B_y - 28.75 \times 0.698 - 6.25 \times 0.15 = 0 \quad \Rightarrow B_y = 16.83N$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 28.75 + 6.258 - A_y - B_y = 0 \quad \Rightarrow A_y = 18.17N$$