سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دکتر حمید حسن‌پور

فصل ششم

تحلیل فوریه سیستم‌های زمان گسسته

فهرست مطالب فصل

مقدمه

- همان‌طور که در فصل دوم مطرح شد، تابع ویژه یک سیستم LTI زمان گسسته به صورت $e^{j\Omega n}$ تعریف می‌شود. همچنین مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $e^{j\Omega n}$ برای سیستم‌های LTIزمان پیوسته به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(\Omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$$

- در رابطه بالا، $H(\Omega)$ تبدیل فوریه $h[n]$ نامیده می‌شود. در این فصل روش‌هایی برای تحلیل سیستم‌های LTI با کمک تحلیل فوریه معرفی شده است.

سری فوریه سیگنال‌های متناوب

۶- ۲- ۱- مقدمه

۶- ۲- ۲- سری فوریه گسسته

۶- ۲- ۳- ویژگی‌های ضرایب سری فوریه گسسته

۶- ۲- ۴- تئوری پارسوال

مقدمه

- همان‌طور که در فصل اول گفته شد، سیگنال $x[n]$ را متناوب گویند اگر عدد **حقیقی** مثبتی همچون T وجود داشته باشد به طوری که

$$x[n+N]=x[n], \qquad -\infty<n<+\infty, \qquad N>0$$

- به کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبتی که در رابطه بالا صدق می‌کند، دوره تناوب سیگنال گفته می‌شود و معمولاً با N_0 نمایش داده می‌شود.

سری فوریه گسسته

- سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب N_0 و فرکانس زاویه‌ای $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ را در نظر بگیرید. سیگنال $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

- که در آن c_k ضرایب سری فوریه گسسته سیگنال $x[n]$ است. این ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

- با قرار دادن $k = 0$ در رابطه c_k مقدار c_0 به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$c_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]$$

سری فوریه گسسته (ادامه)

- در بعضی از کتاب‌ها ضرایب فوریه و سیگنال $x[n]$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$x[n] = \sum_{n=(N_0)} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=(N_0)} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

- که در آن $\sum_{n=(N_0)}$ به مفهوم عملگر مجموع بر روی یک دوره تناوب است.
- سری فوریه یک سیگنال زمان گسسته با عرض محدود همواره همگرا است.

ویژگی‌های ضرایب سری فوریه گسسته

$$c_{k+N_0} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j(k+N_0)\Omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}e^{-jN_0\Omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}e^{-jN_0\frac{2\pi}{N_0}n}$$

$$= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}e^{-j2\pi n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$= c_k$$

- **ویژگی ۱: ضرایب سری فوریه گسسته متناوب است. دوره تناوب این ضرایب N_0 است.**
- با توجه به این ویژگی، کافی است ضرایب سری فوریه در یک دوره تناوب محاسبه شود.

ویژگی‌های ضرایب سری فوریه گسسته (ادامه)

- ویژگی ۲: اگر سیگنال $x[n]$ حقیقی باشد،

داریم:

$$c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^*$$

- که در آن c_k^* مزدوج مختلط c_k است. زیرا

$$c_{-k} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-j(-k)\Omega_0 n}$$

$$= \left(\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n}\right)^* = c_k^*$$

همچنین با توجه به ویژگی ۱ نیز داریم:

$$c_{-k} = c_{N_0-k}$$

ویژگی‌های ضرایب سری فوریه گسسته (ادامه)

- **<u>ویژگی ۳</u>:** فرض کنید سیگنال حقیقی $x[n]$ به صورت مجموع دو سیگنال فرد $x_o[n]$ و سیگنال زوج $x_e[n]$ باشد؛ به عبارت دیگر

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

- اگر ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]$ به صورت c_k باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه سیگنال زوج $x_e[n]$ به صورت $Re\{c_k\}$ خواهد بود. همچنین ضرایب سری فوریه سیگنال فرد $x_o[n]$ نیز به صورت $Im\{c_k\}$ است.
  - ✓**نتیجه ۱. اگر سیگنالی حقیقی زوج باشد، ضرایب سری فوریه آن حقیقی است.**
  - ✓**نتیجه ۲. اگر سیگنالی حقیقی فرد باشد، ضرایب سری فوریه آن کاملاً موهومی است.**

مثال: سیگنال متناوب $x[n] = |n|, -2 \leq n \leq 1$ را در نظر بگیرید.

الف: دوره تناوب پایه و فرکانس زاویه‌ای پایه سیگنال چند است.

ب: سیگنال $x[n]$ را در حوزه زمان رسم نمایید.

ج: ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n]$ را بیابید.

د: سیگنال $x[n]$ را به صورت مجموعی از توابع نمایی بنویسید.

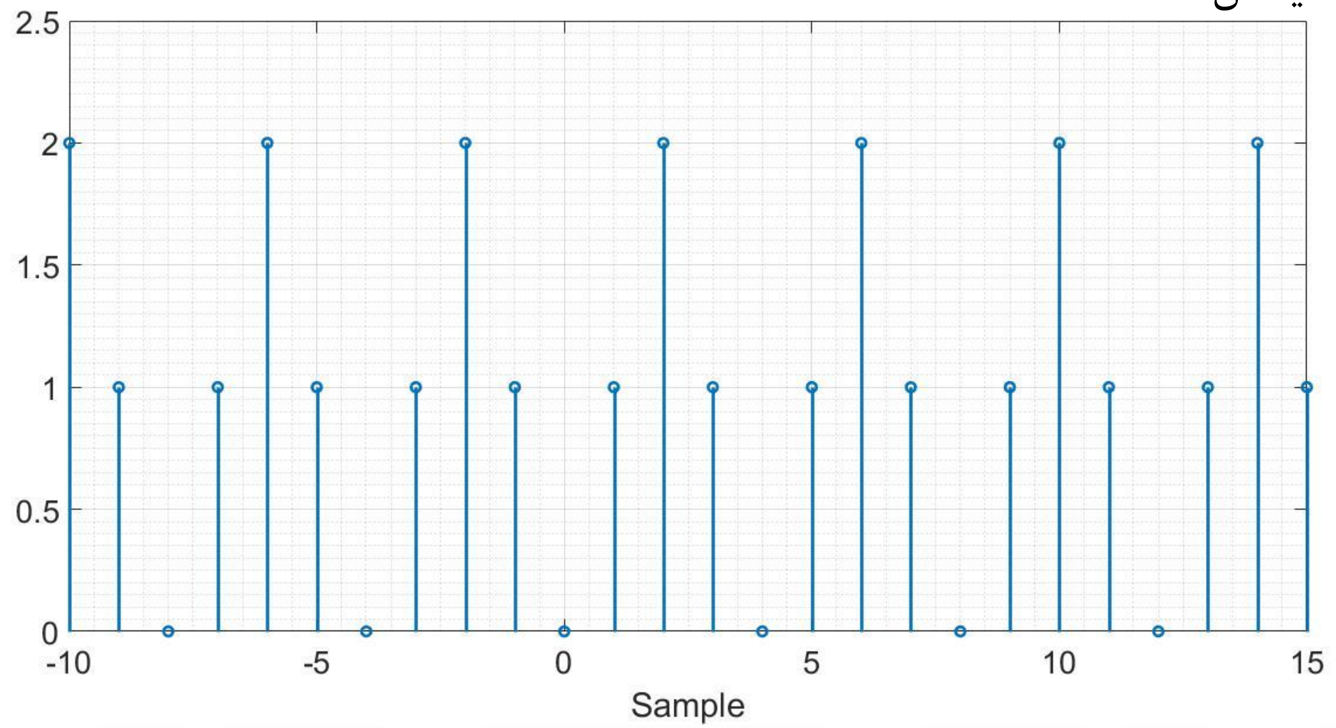
ه: سیگنال $x[n]$ محاسبه شده در قسمت د را رسم نمایید.

و: سیگنال $x[n]$ زوج است؛ بنابراین انتظار می‌رود که ضرایب سری فوریه حقیقی باشند. آیا محاسبات شما نیز همین را نشان می‌دهد؟

پاسخ الف: دوره تناوب پایه سیگنال به صورت $N_0 = 4$ است؛ بنابراین فرکانس زاویه‌ای سیگنال نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

پاسخ ب: نمایش سیگنال



پاسخ ج: ضرایب c_k را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبات ساده‌تر معمولا از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=(N_0)} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=(N_0)} x[n]\left(e^{-j\Omega_0}\right)^{kn}$$

مقدار $e^{-j\Omega_0}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$e^{-j\Omega_0} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j$$

بنابراین ضرایب c_k به صورت زیر است.

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{1} x[n](-j)^{kn}$$

ادامه مثال

$$c_0 = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{1} x[n] = \frac{1}{4}(2+1+0+1) = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{1} x[n](-j)^n = \frac{1}{4}\left(2(-j)^{-2} + 1(-j)^{-1} + 1(-j)\right) = \frac{1}{4}(-2+j-j) = -\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{1} x[n](-j)^{2n} = \frac{1}{4}\left(2(-j)^{-4} + 1(-j)^{-2} + 1(-j)^{2}\right) = \frac{1}{4}(2-1-1) = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{1} x[n](-j)^{3n} = \frac{1}{4}\left(2(-j)^{-6} + 1(-j)^{-3} + 1(-j)^{3}\right) = \frac{1}{4}(-2-j+j) = -\frac{1}{2}$$

برای بقیه ضرایب نیز داریم:

$$c_{k+4} = c_k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

پاسخ د:

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}=\sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}=\sum_{k=0}^{3} c_k\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^{kn}$$

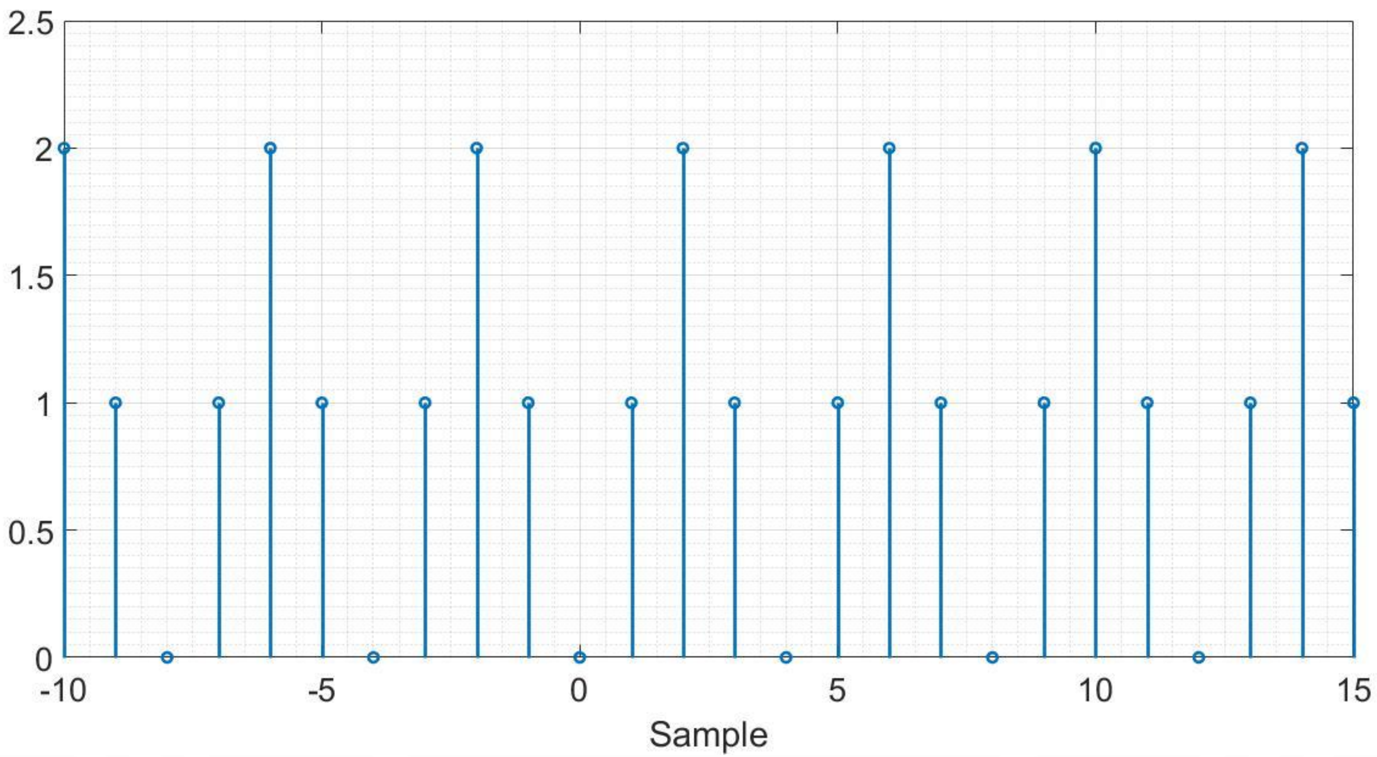
$$=\sum_{k=0}^{3} c_k\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{kn}=\sum_{k=0}^{3} c_k j^{kn}=\sum_{k=0}^{3} c_k\left(j^k\right)^n$$

$$=c_0(1)^n+c_1(j)^n+c_2\left(j^2\right)^n+c_3\left(j^3\right)^n=c_0+c_1(j)^n+c_2(-1)^n+c_3(-j)^n$$

$$=1-\frac{1}{2}(j)^n-\frac{1}{2}(-j)^n$$

ادامه مثال

پاسخ ه: سیگنال بازسازی شده



دقیقا سیگنال بازسازی شده با سیگنال اصلی برابر است. علت امر آن است که هیچ تقریبی زده نشده است و سیگنال بازسازی شده از روی سری فوریه شامل جملات محدودی است.

ادامه مثال

به کمک کد زیر می‌توان خروجی‌های این قسمت را تولید کرد.

```
clear;close all;clc;
n_1=[-2 -1 0 1];
x_1=[2 1 0 1];
x=[x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 x_1 2 1];
n=-10:15;
%%نمایش سیگنال
figure;
SS_rep_dt(n,x,[0 2.5]);
%%بازسازی سیگنال و نمایش آن
x_rebuild=1-1/2*(1j).^n -1/2*(-1j).^n;
figure;
SS_rep_dt(n,x_rebuild,[0 2.5]);
```

پاسخ و: از آنجایی که سیگنال $x[n]$ زوج است؛ بنابراین انتظار می‌رود که ضرایب سری فوریه حقیقی باشند. ضرایب محاسبه شده در قسمت ج نیز همین موضوع را تایید می‌کند.

تئوری پارسوال

سیگنال متناوب $x[n]$ با دوره تناوب N_0 و فرکانس زاویه‌ای $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ را در نظر بگیرید. سیگنال $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

در این صورت تئوری پارسوال بیان می‌کند که

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=(N_0)} c_k e^{jk\Omega_0 n} = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=(N_0)} |x[n]|^2 = \sum_{k=(N_0)} |c_k|^2$$

که در آن $\frac{1}{N_0}\sum_{n=(N_0)}|x[n]|^2$ همان توان متوسط سیگنال متناوب $x[n]$ است.

تبدیل فوریه

۶- ۳- ۱- تعریف تبدیل فوریه

۶- ۳- ۲- تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی

۶- ۳- ۳- ویژگی‌های تبدیل فوریه

۶- ۳- ۴- تئوری پارسوال

۶- ۳- ۵- تبدیل فوریه معکوس

۶- ۳- ۶- ناحیه همگرایی تبدیل فوریه

۶- ۳- ۷- طیف دامنه و فاز سیگنال

۶- ۳- ۸- رابطه بین تبدیل فوریه و تبدیل z

تعریف تبدیل فوریه

- تبدیل فوریه سیگنال **نامتناوب** $x[n]$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

- که در این رابطه Ω فرکانس زاویه‌ای برحسب رادیان است. همچنین تبدیل فوریه معکوس سیگنال $X(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

تعریف تبدیل فوریه (ادامه)

- معمولاً برای نشان دادن تبدیل فوریه یک سیگنال از دو نمایش زیر استفاده می‌شود.

$$X(\Omega) = \mathfrak{F}\{x[n]\} \qquad\qquad x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$$

- در بسیاری از کتاب‌ها و نوشته‌های علمی از $X\left(e^{j\Omega}\right)$ به جای $X(\Omega)$ استفاده می‌شود. دقت کنید در این نوشتار، منظور از $X\left(e^{j\Omega}\right)$ جاگذاری $e^{j\Omega}$ در $X(\Omega)$ نیست، بلکه این دو دقیقاً معادل هستند.

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\Omega}\right)e^{j\Omega t}d\Omega$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \mathfrak{F}\{x[n]\} \qquad\qquad x[n] \leftrightarrow X\left(e^{j\Omega}\right)$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x[n] = a^n u[n]$ را بیابید. $|a| < 1$

پاسخ:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(ae^{-j\Omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی

- فرض کنید سیگنال حقیقی $x[n]$ به صورت مجموع دو سیگنال فرد $x_o[n]$ و سیگنال زوج $x_e[n]$ باشد؛ به عبارت دیگر

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

- آنگاه تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathfrak{F}\{x[n]\} = X_e(\Omega) + jX_o(\Omega)$$

- که در آن سیگنال $X_e(\Omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x_e[n]$ و سیگنال $X_o(\Omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x_o[n]$ است. از رابطه بالا می‌توان دو نتیجه گرفت.

✓**نتیجه ۱.** اگر سیگنالی حقیقی زوج باشد، تبدیل فوریه آن حقیقی است.

✓**نتیجه ۲.** اگر سیگنالی حقیقی فرد باشد، تبدیل فوریه آن کاملاً موهومی است.

تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی (ادامه)

- برای سیگنال حقیقی $x[n]$ با تبدیل فوریه $X(\Omega)$ همواره رابطه زیر برقرار است.

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega)$$

- رابطه قبل یک شرط لازم و کافی برای حقیقی بودن یک سیگنال است؛ به عبارت دیگر اگر سیگنالی حقیقی باشد، آنگاه شرط $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$ برای آن درست است. همچنین اگر برای سیگنالی شرط $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$ درست باشد، آنگاه لزوماً سیگنال حقیقی است.

ویژگی‌های تبدیل فوریه

سیگنال در حوزه زمان	سیگنال در حوزه فرکانس	
$x[\mathrm{n}], x_1[\mathrm{n}], x_2[\mathrm{n}]$	$X(\Omega), X_1(\Omega), X_2(\Omega)$	
	$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$	ویژگی متناوب بودن
$a_1 x_1[\mathrm{n}] + a_1 x_2[\mathrm{n}]$	$a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$	ویژگی خطی بودن
$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$	ویژگی انتقال در زمان
$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$	ویژگی انتقال در حوزه فرکانس
$x[-n]$	$X(-\Omega)$	ویژگی عکس زمانی
$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$	ویژگی مزدوج مختلط
$x[n] - x[n-1]$	$\left(1 - e^{-j\Omega}\right) X(\Omega)$	ویژگی تفاضل مرتبه اول در حوزه زمان
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\pi X(0)\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}$	ویژگی کانولوشن انتگرال در حوزه زمان
$-j.n.x[n]$	$\frac{d}{d\Omega} X(\Omega)$	ویژگی مشتق در حوزه فرکانس
$(-j.n)^k x[n]$	$\frac{d^k}{d\Omega^k} X(\Omega)$	ویژگی مشتق مراتب بالا در حوزه فرکانس
$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(\Omega) X_2(\Omega)$	کانولوشن در حوزه زمان

تبدیل فوریه معکوس

- تبدیل فوریه معکوس سیگنال $X(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

- معمولاً برای نشان دادن تبدیل فوریه معکوس یک سیگنال از نمایش زیر استفاده می‌شود.

$$\mathfrak{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = x[n]$$

مثال: تبدیل فوریه معکوس سیگنال $X(\Omega)$ را بیابید. ($0 < W < \pi$)

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, 0 \le |\Omega| \le W \\ 0, W \le |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

پاسخ:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\mathrm{W}}^{W} e^{j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}.\frac{1}{j\mathrm{n}}e^{j\Omega n}\Big|_{-W}^{W}$$

$$= \frac{1}{2\pi}.\frac{1}{jn}\left(e^{j\mathrm{W}n} - e^{-j\mathrm{W}n}\right) = \frac{1}{2\pi}.\frac{1}{jn}\left(e^{j\mathrm{W}n} - e^{-j\mathrm{W}n}\right) = \frac{\sin(Wn)}{\pi n}$$

مثال: تبدیل فوریه معکوس سیگنال $X(\Omega)=\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)$ را بیابید.

پاسخ:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{2\pi}\delta(\Omega-\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega+\int_{2\pi}\delta(\Omega+\Omega_0)e^{j\Omega n}d\Omega\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(e^{j\Omega_0 n}+e^{-j\Omega_0 n}\right)=\frac{\cos(\Omega_0 n)}{\pi}$$

طیف دامنه و فاز سیگنال

- ضرایب مختلط $X(\Omega)$ از سیگنال $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)}$$

- به نمودار $|X(\Omega)|$ بر حسب فرکانس زاویه‌ای Ω طیف دامنه سیگنال گفته می‌شود.
- به نمودار $\phi(\Omega)$ بر حسب فرکانس زاویه‌ای Ω طیف فاز سیگنال گفته می‌شود.
- دقت کنید که طیف فاز و طیف دامنه سیگنال نمودارهایی پیوسته در فرکانس هستند. همانطور که قبلا گفته شد، $X(\Omega)$ تابعی متناوب با دوره تناوب 2π است.

رابطه بین تبدیل فوریه و تبدیل Z

- تبدیل z سیگنال $x[n]$ را در نظر بگیرید.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

- که در آن متغیر z یک متغیر مختلط است. اگر فرض کنیم $z = e^{j\Omega}$ تبدیل z به تبدیل فوریه تبدیل می‌شود؛ به عبارت دیگر

$$X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

- با توجه به مطالب ذکر شده، تبدیل فوریه یک حالت خاص از تبدیل z است؛ به عبارت دیگر

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(\Omega)$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x[n] = a^n u[n]$ را با کمک تبدیل z بیابید.

پاسخ: تبدیل z سیگنال $x[n]$ به صورت $X(z) = \frac{1}{a+z}$ است. بنابراین تبدیل فوریه آن به صورت زیر است.

$$X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 - az^{-1}}\Bigg|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

ناحیه همگرایی تبدیل z سیگنال به صورت $|z| > |a|$ می‌باشد بنابراین شرط درست بودن تبدیل فوریه آن است که $|e^{j\Omega}| > |a|$ باشد؛ به عبارت دیگر $|a| < 1$ باشد.

مثال: تبدیل فوریه سیگنال $x[n] = u[n]$ را با کمک تبدیل z بیابید.

پاسخ: از آنجایی که سیگنال $x[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر نیست، محاسبه تبدیل فوریه از روی تبدیل z امکانپذیر نیست. تبدیل z سیگنال $x[n]$ به صورت $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$ است. تبدیل فوریه این سیگنال به صورت $X(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi\delta(\Omega)$ است. هیچ ارتباطی بین تبدیل فوریه و تبدیل z وجود ندارد.

تحلیل سیستم‌های LTI زمان گسسته با کمک تبدیل فوریه

۶- ۴- ۱- پاسخ فرکانسی

۶- ۴- ۲- حل سیستم‌های **LTI** توصیف شده با معادلات دیفرانسیلی

پاسخ فرکانسی

- همان‌طور که در فصل‌های قبل اشاره شد، خروجی $y[n]$ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ نسبت به ورودی $x[n]$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

- با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف تساوی به رابطه زیر می‌رسیم.

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$$

- به $H(\Omega)$ پاسخ فرکانسی سیستم گفته می‌شود که تبدیل فوریه پاسخ ضربه $h[n]$ است.

پاسخ فرکانسی (ادامه)

- پاسخ فرکانسی به صورت نسبت تبدیل فوریه خروجی سیستم به تبدیل فوریه ورودی آن است؛ به عبارت دیگر

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$

$X(\Omega) \longrightarrow \boxed{H(\Omega)} \longrightarrow Y(\Omega) = X(\Omega).H(\Omega)$

پاسخ فرکانسی (ادامه)

- به $|H(\Omega)|$ پاسخ دامنه و به $\phi(\Omega)$ پاسخ فاز سیستم گفته می‌شود. رابطه‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$|Y(\Omega)| = |H(\Omega)|.|X(\Omega)|$$

$$\phi_y(\Omega) = \phi_h(\Omega) + \phi_x(\Omega)$$

- فاز خروجی به صورت مجموع فاز ورودی و فاز پاسخ فرکانسی تعریف می‌شود.
- اندازه خروجی به صورت حاصل‌ضرب اندازه ورودی و اندازه پاسخ فرکانسی تعریف می‌شود. به اندازه پاسخ فرکانسی بهره نیز گفته می‌شود.

مثال: خروجی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ و ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$ را بیابید.

پاسخ:

$$X(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\Omega}}$$

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\Omega}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}=\frac{c_1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\Omega}}+\frac{c_2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$c_1=\lim_{e^{-j\Omega}\to 5}\left(1-\frac{1}{5}e^{-j\Omega}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\Omega}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}=\lim_{e^{-j\Omega}\to 5}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-\frac{5}{3}}=-\frac{3}{2}$$

$$c_2=\lim_{e^{-j\Omega}\to 3}\left(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\Omega}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}=\lim_{e^{-j\Omega}\to 3}\frac{1}{1-\frac{1}{5}e^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}$$

ادامه مثال

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) = -\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{5}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

بنابراین خروجی به صورت زیر است.

$$y[n] = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n] + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

مثال: سیستمی LTI به صورت $y[n] = T\{x[n]\}$ را در نظر بگیرید. خروجی این سیستم به ازای ورودی $x_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ سیگنال $y_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ است. پاسخ ضربه این سیستم را بیابید.

پاسخ: ابتدا پاسخ فرکانسی سیستم را محاسبه و سپس از روی آن پاسخ ضربه را پیدا می‌کنیم.

$$X_1(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$Y_1(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$H(\Omega) = \frac{Y_1(\Omega)}{X_1(\Omega)} = \frac{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

با کمک تقسیم چند جمله‌ای کسر $H(\Omega)$ را ساده می‌کنیم.

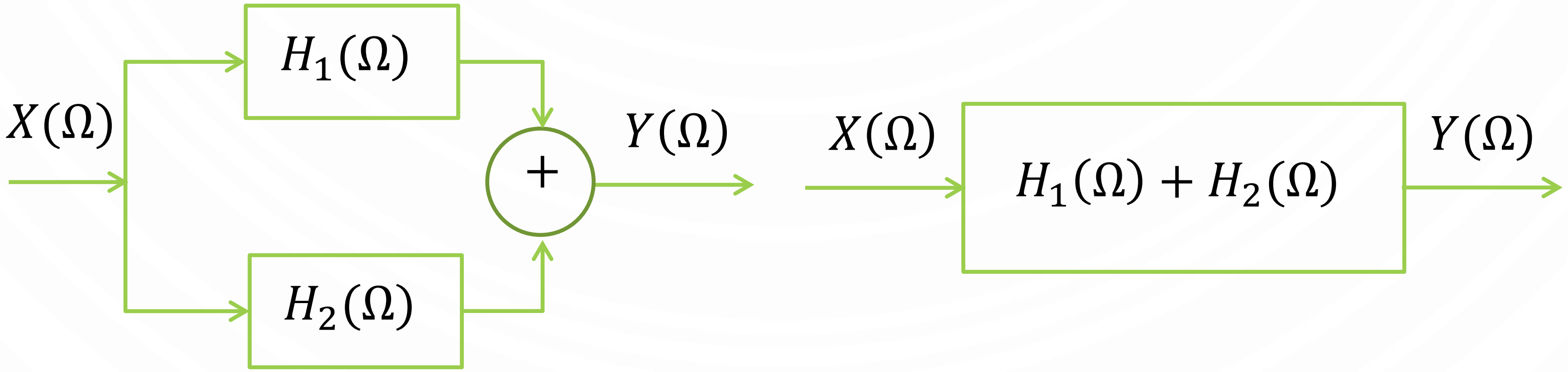
$$
\begin{array}{r|l}
-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}+1 & -\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+1 \\ \cline{2-2}
-\left(-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}+\frac{2}{3}\right) & \frac{2}{3} \\ \cline{1-1}
\frac{1}{3} &
\end{array}
$$

$$H(\Omega)=\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

بنابراین پاسخ ضربه به صورت زیر است.

$$h[n]=\frac{2}{3}\delta[n]+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

- اگر بخواهیم سیستم‌های LTI موازی را به کمک پاسخ فرکانسی مدل کنیم، پاسخ فرکانسی به صورت مجموع پاسخ‌های فرکانسی زیر سیستم‌ها خواهد بود.



- اگر بخواهیم سیستم‌های LTI سری را به کمک پاسخ فرکانسی مدل کنیم، پاسخ فرکانسی به صورت حاصل‌ضرب پاسخ‌های فرکانسی زیر سیستم‌ها خواهد بود.

حل سیستم‌های LTI توصیف شده با معادلات دیفرانسیلی

- یک معادله تفاضلی مرتبه N با ضرایب ثابت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- که در آن a_k و b_k ضرایب حقیقی ثابت هستند و لزوماً $a_N \neq 0$. اگر از طرفین رابطه بالا تبدیل فوریه بگیریم، رابطه بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

- بنابراین می‌توان نوشت:

$$Y(\Omega) \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} = X(\Omega) \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}$$

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

مثال: رابطه بین ورودی و خروجی یک سیستم به صورت زیر است.

$$y[n-1]+2y[n]=x[n-1]$$

الف: پاسخ فرکانسی سیستم را بیابید.

ب: پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

ج: خروجی سیستم به ازای ورودی $x_1[n]=0.2^n u[n]$ را بیابید.

پاسخ الف: از طرفین رابطه تبدیل فوریه می‌گیریم.

$$e^{-j\Omega}Y(\Omega)+2Y(\Omega)=e^{-j\Omega}X(\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(\Omega)\left(e^{-j\Omega}+2\right)=e^{-j\Omega}X(\Omega)$$

$$\Rightarrow H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega}+2}$$

پاسخ ب:

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega}+2}=\frac{e^{-j\Omega}+2-2}{e^{-j\Omega}+2}=1-\frac{2}{e^{-j\Omega}+2}=1-\frac{1}{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+1}$$

بنابراین پاسخ ضربه به صورت زیر است.

$$h[n]=\delta[n]-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

پاسخ ج: تبدیل فوریه سیگنال ورودی را محاسبه می‌کنیم.

$$x_1[n]=0.2^{n}u[n]\Rightarrow X_1(\Omega)=\frac{1}{1-0.2e^{-j\Omega}}$$

$$Y_1(\Omega) = X_1(\Omega)H(\Omega) = \frac{1}{1-0.2e^{-j\Omega}} \cdot \frac{e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega}+2}$$

برای تفکیک کسر بالا به کسرهای جزئی ابتدا تغییر متغیر $k = e^{-j\Omega}$ را انجام می‌دهیم.

$$Y_1(\Omega)\Big|_{k=e^{-j\Omega}} = \frac{1}{1-0.2k} \cdot \frac{k}{k+2} = \frac{\lambda_1}{1-0.2k} + \frac{\lambda_2}{2+k}$$

$$\lambda_1 = \lim_{k\to 5}(1-0.2k)\frac{1}{1-0.2k} \cdot \frac{k}{k+2} = \lim_{k\to 5}\frac{k}{k+2} = \frac{5}{7}$$

$$\lambda_2 = \lim_{k\to -2}(k+2)\frac{1}{1-0.2k} \cdot \frac{k}{k+2} = \lim_{k\to -2}\frac{k}{1-0.2k} = -\frac{2}{1.4} = -\frac{10}{7}$$

$$Y_1(\Omega)\Big|_{k=e^{-j\Omega}} = \frac{\frac{5}{7}}{1-0.2k} - \frac{\frac{10}{7}}{2+k} = \frac{\frac{5}{7}}{1-0.2k} - \frac{\frac{5}{7}}{1+0.5k}$$

$$Y_1(\Omega) = \frac{\frac{5}{7}}{1-0.2e^{-j\Omega}} - \frac{\frac{5}{7}}{1+0.5e^{-j\Omega}}$$

بنابراین خروجی به صورت زیر است.

$$y_1[n] = \frac{5}{7}(0.2)^n u[n] - \frac{5}{7}(0.5)^n u[n]$$

تبدیل فوریه گسسته

- در این بخش تبدیل فوریه گسسته(DFT) برای سیگنال‌های با طول محدود توصیف شده است.
- دقت کنید تبدیل فوریه گسسته را با تبدیل فوریه سیگنال‌های زمان گسسته اشتباه نگیرید.

تعریف

- سیگنال زمان گسسته با طول محدود N را در نظر بگیرید.

$$x[n] = 0, if\ (n < 0)\ or\ (n \geq N)$$

- تبدیل فوریه گسسته N نقطه‌ای سیگنال $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

که در آن W_N به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$$

- در این تبدیل N نقطه $X[k]$ در محدوده فرکانسی $[0\ 2\pi)$ قرار دارد.
- تبدیل فوریه گسسته معکوس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

ویژگی‌های مهم DFT

- در DFT بین $x[n]$ و $X[k]$ تناظر نقطه به نقطه وجود دارد.
- برای DFT الگوریتم‌های سریع وجود دارد. این الگوریتم سریع با نام FFT(Fast Fourier Transform) شناخته می‌شود.
- DFT برای بازنمایی فرکانسی سیگنال‌های گسسته با طول محدود مناسب است.

مثال: تبدیل فوریه گسسته سیگنال $x[n] = u[n] - u[n-7]$ را بیابید.

پاسخ:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{6} W_7^{kn} = \frac{1 - W_7^{7k}}{1 - W_7^{k}} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{7}\right)k}} = 0, k$$
$$= 1,2, \dots, 6$$

$$X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{0n} = \sum_{n=0}^{6} x[n] = 7$$

رابطه مجموع سری هندسی $\sum_{i=0}^{N} r^i = \frac{1-r^{N+1}}{1-r}$

مثال: تبدیل فوریه گسسته سیگنال $x[n]=\begin{cases} e^{jn}, 0\le n\le 7 \\ 0, \quad \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$ را بیابید.

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{7}e^{jn}W_8^{kn}=\sum_{n=0}^{7}\left(e^jW_8^k\right)^n=\frac{1-\left(e^jW_8^k\right)^8}{1-e^jW_8^k}$$

$$=\frac{1-\left(e^{8j}e^{-j2\pi k}\right)}{1-e^je^{-j\frac{\pi}{4}k}}=\frac{1-e^{-j(2\pi k-8)}}{1-e^{-j\left(\frac{\pi}{4}k-1\right)}}=\frac{e^{-j(\pi k-4)}\left(e^{j(\pi k-4)}-e^{-j(\pi k-4)}\right)}{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}k-\frac{1}{2}\right)}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{8}k-\frac{1}{2}\right)}-e^{-j\left(\frac{\pi}{8}k-\frac{1}{2}\right)}\right)}$$

$$=\frac{e^{-j(\pi k-4)}\sin(\pi k-4)}{e^{-j\left(\frac{\pi}{8}k-\frac{1}{2}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{8}k-\frac{1}{2}\right)}=e^{-j\left(\frac{7\pi}{8}k-\frac{7}{2}\right)}\frac{\sin(\pi k-4)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k-\frac{1}{2}\right)}$$

محاسبه تبدیل فوریه گسسته در MALTAB

- برای محاسبه تبدیل فوریه گسسته در Matlab از دستور زیر استفاده می‌شود.

```
SIG=fft(sig);
```

- برای محاسبه تبدیل فوریه گسسته معکوس در Matlab از دستور زیر استفاده می‌شود.

```
sig=ifft(SIG);
```

مثال: سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \begin{cases} e^{\frac{n}{150}} + e^{-\frac{n}{30}} + \sin(n) + \sin\left(\frac{n}{5}\right), & 0 \le n < 50 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

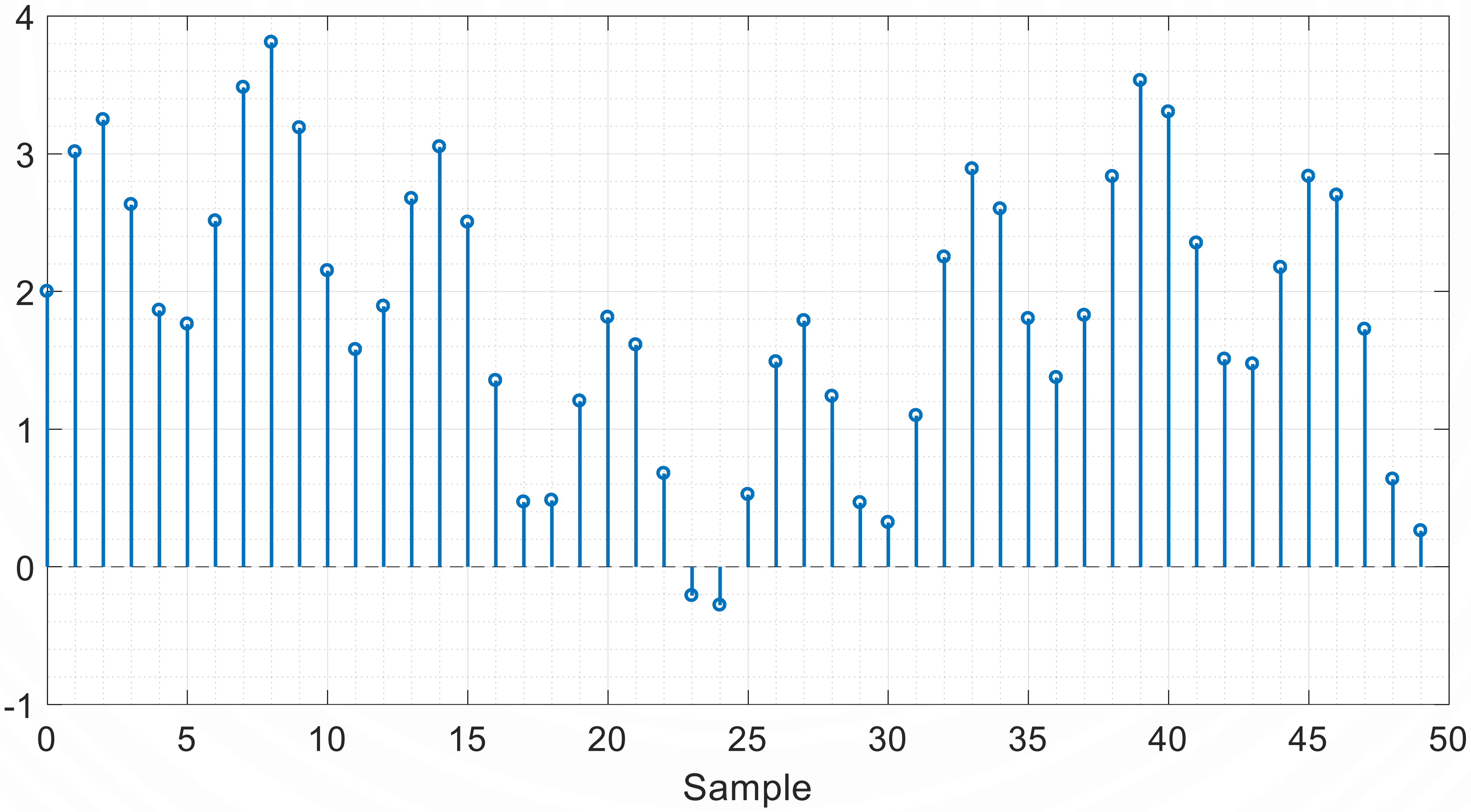
الف: این سیگنال را در حوزه زمان نمایش دهید.

ب: تبدیل فوریه گسسته سیگنال را نمایش دهید.

ج: به انتهای سیگنال ۱۰۰ صفر اضافه نمایید و سپس تبدیل فوریه گسسته با ۱۵۰ نقطه را رسم نمایید.

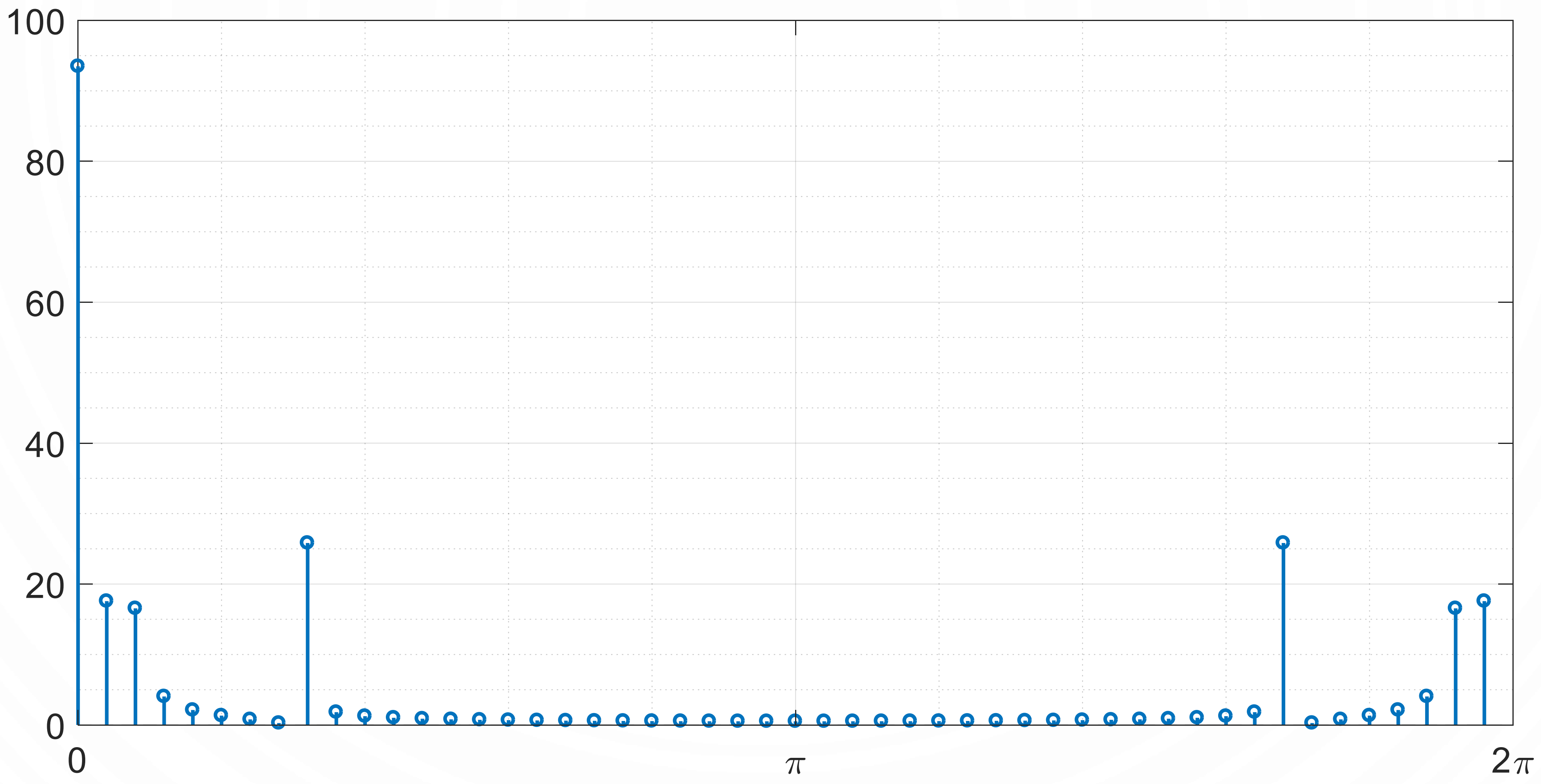
د: چه تفاوتی بین نتیجه قسمت ب و ج وجود دارد؟

پاسخ الف: نمایش سیگنال در حوزه زمان

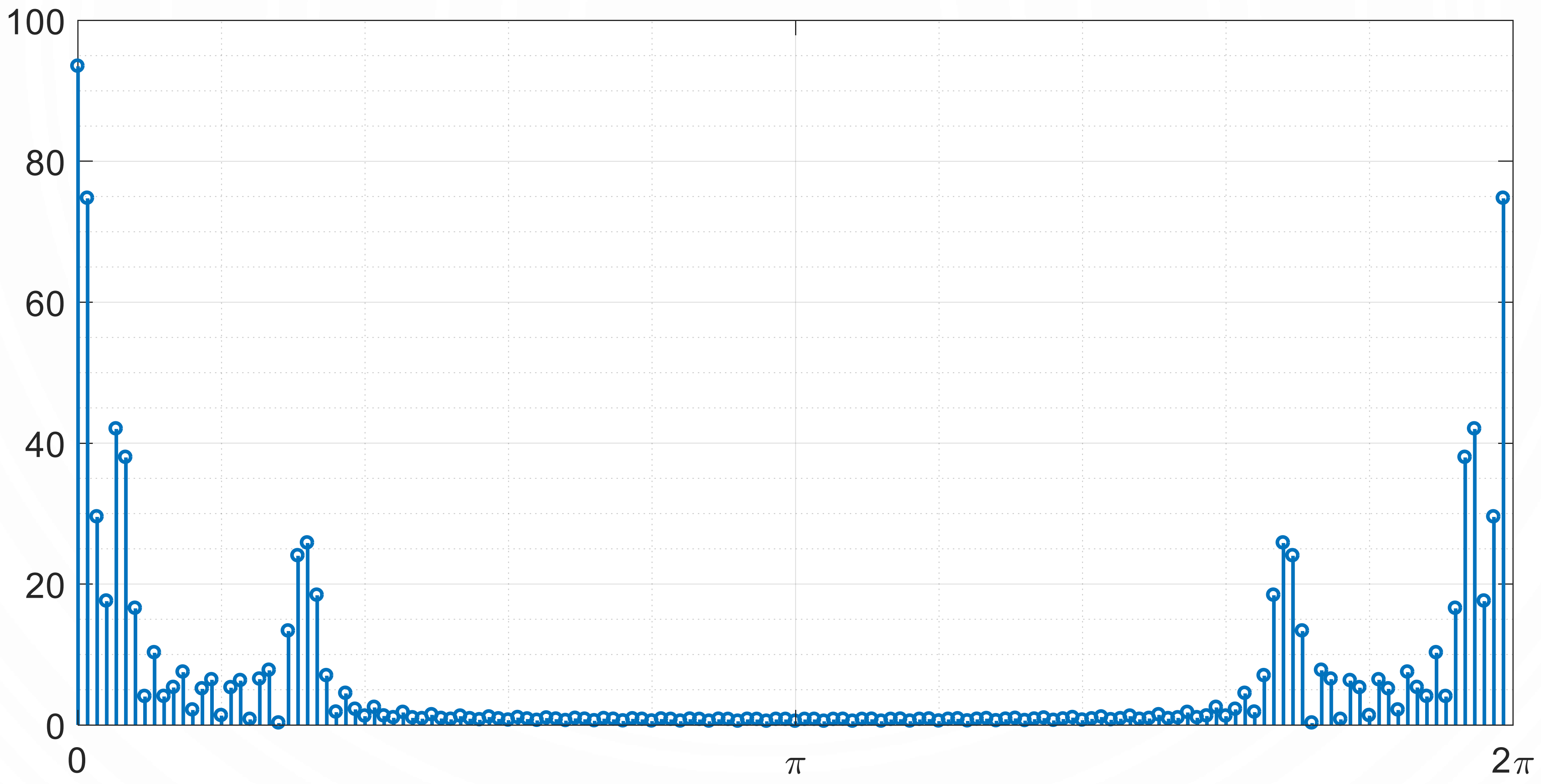


ادامه مثال

پاسخ ب: نمایش سیگنال در حوزه فرکانس با تبدیل فوریه گسسته ۵۰ نقطه‌ای



پاسخ ج: نمایش سیگنال در حوزه فرکانس با تبدیل فوریه گسسته ۱۵۰ نقطه‌ای



پاسخ د: با افزایش تعدادی صفر به انتهای سیگنال رزولوشن تبدیل فوریه گسسته افزایش می‌یابد.

افزونی صفر (ZERO PADDING)

- در صورتی که بخواهیم از یک سیگنال با طول M، تبدیل فوریه گسسته با طول N بگیریم و $M < N$ باشد، به قدر کافی به انتهای سیگنال صفر اضافه می‌کنیم تا طول سیگنال به اندازه N شود. به این کار Zero Padding گفته می‌شود.
- اگر N توانی از دو باشد، محاسبات کامپیوتری سریع‌تر خواهد بود.

ارتباط بین DFT با تبدیل فوریه زمان گسسته

- تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ با طول محدود N از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n}$$

- تبدیل فوریه گسسته N نقطه‌ای سیگنال $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)n}, \qquad k = 0,1,\dots,N-1$$

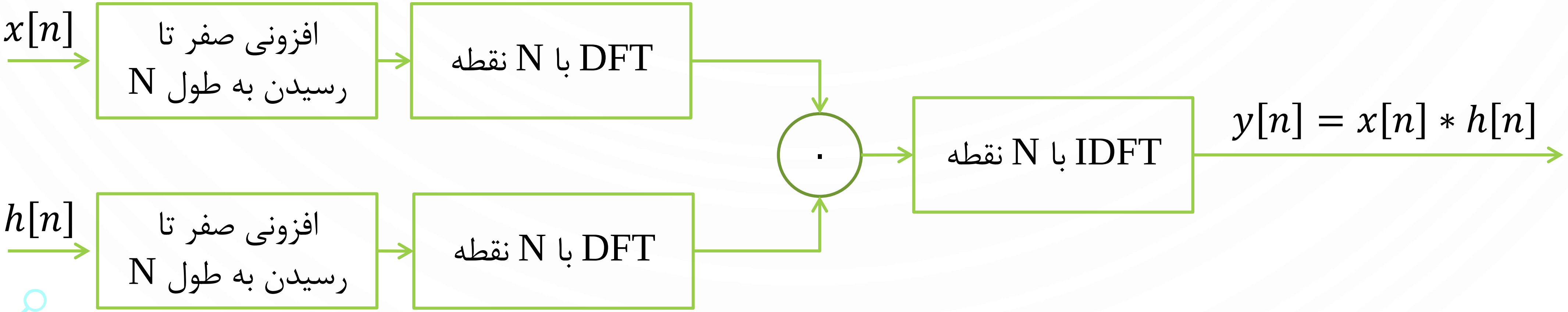
- با مقایسه دو رابطه بالا می‌توان دریافت که

$$X[k\,] = X(\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{2k\pi}{N}} = X\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$$

- در واقع DFT ، فقط N نمونه از تبدیل فوریه زمان گسسته را شامل می‌شود.

محاسبه کانولوشن سیگنال با کمک DFT

- هدف: محاسبه کانولوشن بین دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$ به کمک تبدیل فوریه گسسته
  - ✓ گام اول: افزونی صفر به دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$ تا رسیدن به طول N
  - ✓ گام دوم: محاسبه تبدیل فوریه گسسته با N نقطه برای دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$
  - ✓ گام سوم: محاسبه $Y[k] = X[k]H[k]$
  - ✓ گام چهارم محاسبه تبدیل فوریه گسسته معکوس از سیگنال $Y[k]$
- N حداقل باید به اندازه $N_x + N_\mathrm{h} - 1$ باشد که در N_x و N_h طول دو سیگنال $x[n]$ و $h[n]$ است.



مثال: دو سیگنال زیر را در نظر بگیرید.

$$x[n] = [1\ 2\ 1\ 0\ 3\ 2];$$
$$h[n] = [1\ 3\ 2];$$

الف: این دو سیگنال را نمایش دهید.

ب: کانولوشن بین آن‌ها را به روش معمولی محاسبه نمایید.

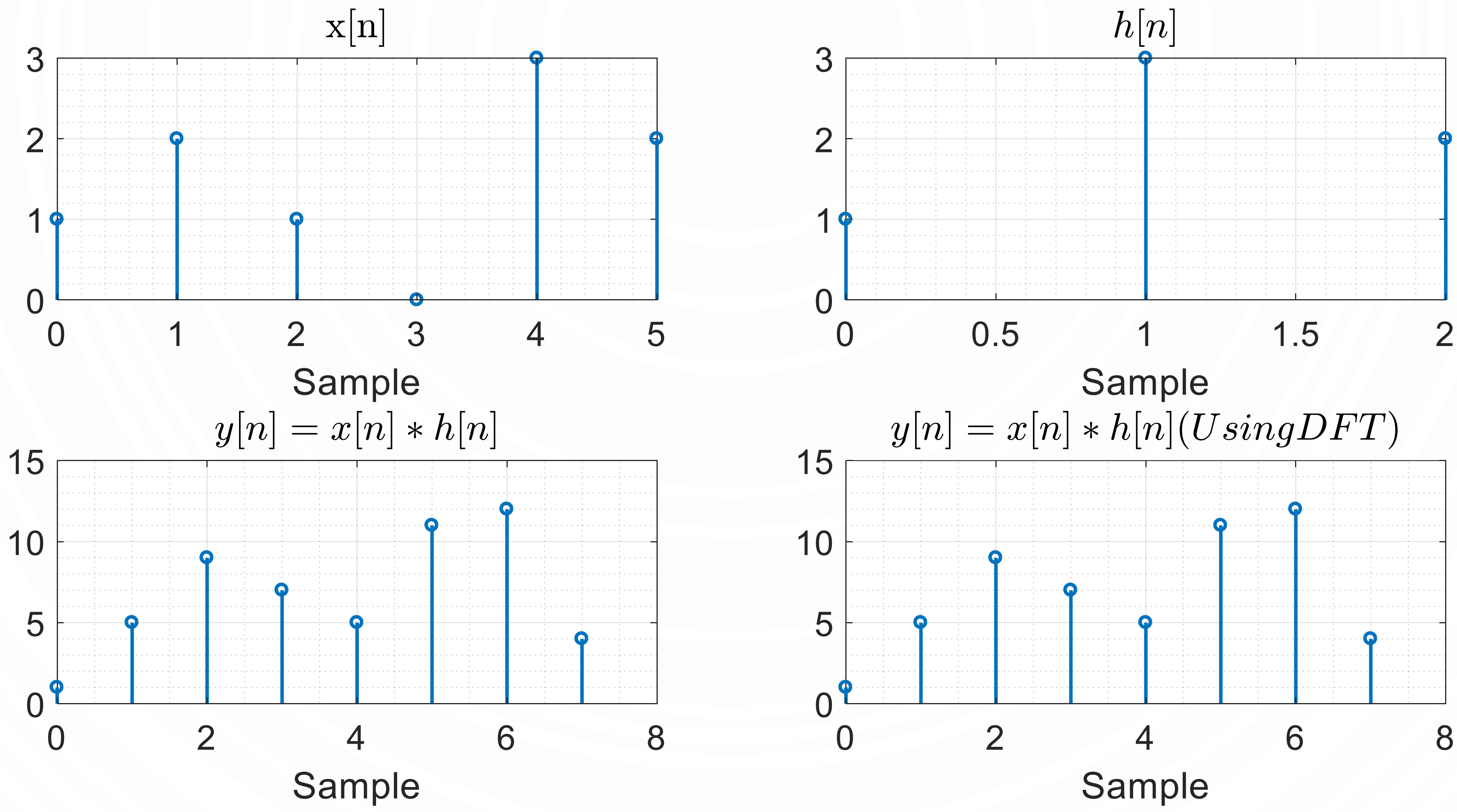
ج: کانولوشن بین آن‌ها را به کمک DFT محاسبه نمایید.

این مثال را با کمک Matlab حل نمایید.

```
clc; clear; close all;
x=[1 2 1 0 3 2];
h=[1 3 2];

x_n=length(x);
h_n=length(h);

%% Ans A
figure;
subplot(2,2,1);
SS_rep_dt(0:x_n-1,x,[]);
title('x[n]','Interpreter','latex');
subplot(2,2,2);
SS_rep_dt(0:h_n-1,h,[]);
title('$h[n]$','Interpreter','latex');
%% Ans B
y_1=conv(x,h);
subplot(2,2,3);
SS_rep_dt(0:length(y_1)-1,y_1,[]);
title('$y[n]=x[n]*h[n]$','Interpreter','latex');
```

```
%% Ans C
N=x_n+h_n-1;
x=[x zeros(1,N-x_n)];
h=[h zeros(1,N-h_n)];

X=fft(x);
H=fft(h);
Y=X.*H;
y=ifft(Y);
subplot(2,2,4);
SS_rep_dt(0:length(y)-1,y,[]);
title('$y[n]=x[n]*h[n]  (Using DFT)$','Interpreter','latex');
```

ادامه مثال



x[n]
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5
Sample
h[n]
3
2
1
0
0 0.5 1 1.5 2
Sample
y[n] = x[n] * h[n]
15
10
5
0
0 2 4 6 8
Sample
y[n] = x[n] * h[n](UsingDFT)
15
10
5
0
0 2 4 6 8
Sample