

۷- ۰۲۳۳۲۳۰۰۲۴۰
۳۲۲۶

سپاس خدا

محاسبات عددی

۱- حل مسائل خطی
۲- دستگاه معادلات

۳- درون یابی و تریک نیوتن برای پیدا کردن جذورهای ما

۴- مشتق گیری و انتگرال گیری

۵- حل مسائل غیر خطی

۶- حل مسائل معادلات جبری (A x = 0)

۷- مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

۸- حل مسائل دفرانسیل مرتبه اول

۹- روش عددی مشتقات

۱۰- درون یابی

Interpolation

کودک ۲۹/۱/۹۴

اسم صوری

اصول میکرو و ماکرو

آزموده

ضارادی

درسنامه ۸ بهج

۹۷/۲/۱۷

۹۱۵۲۱۲۹۸۷۵

۹۳۲۳۳۳۳۳

نمره ۲

نمره ۴

نمره ۱۲

نمره ۲

نمره ۲

$$(y' = f(x, y))$$

فرض: مقدار تابع $f(x)$ در $n+1$ نقطه جدا از هم در بازه $[a, b]$ داده شده است

$$a \leq x_0, x_1, \dots, x_n \leq b$$

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \rightarrow \text{مقدار}$$

هدف پیدا کردن یک چند جمله ای درجه n $(P_n(x))$ است که مقدار این چند جمله ای در نقاط داده شده با مقدار تابع اصلی $f(x)$ برابر باشد یعنی:

$$P_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

این چند جمله ای اصطلاحاً تابع f را در بازه $a \leq x_0, \dots, x_n \leq b$ درون یابی می کنند

چند جمله ای $P_n(x)$ را چند جمله ای درجه n می گویند.

اثبات: منفرجه فرد درون

بر اساس هر همان خلت فرض می کنیم $P_n(x)$ منفرجه فرد باشد یعنی چند جمله ای درجه n است

برای $Q_n(x)$ منفرجه فرد داریم که $n+1$ نقطه درون یابی کنند یعنی:

$$Q_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$h(x) = P_n(x) - Q_n(x)$$

تابع $h(x)$ را به دست زیرترین می‌کنیم:

واضح است که $h(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر n است (زیرا تفاضل دو چند جمله‌ای از درجه n است)

پس حداکثر n ریشه دارد. نه طوری داریم:

$$h(x_i) = P_n(x_i) - Q_n(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0 \quad i=0, \dots, n$$

و این یعنی $n+1$ نقطه $x_0, \dots, x_n$ ریشه $h(x)$ می‌باشند که با مطلب من

در تناقض است پس $P_n(x)$ منحصر به فرد است.

ریشه لاگرانژ برای تعیین $P_n(x)$:

چند جمله‌ای $P_n(x)$ که تابع $f(x)$ را در $x_0, \dots, x_n$ درون a می‌گیرد را به دست زیرین می‌نویسیم:

$$P_n(x) = a_0 l_0(x) + a_1 l_1(x) + \dots + a_n l_n(x)$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد ثابت، $l_i(x)$ چند جمله‌ای‌های نرم n به دست زیرین باشند:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

از ترتیب تابع $l_i(x)$ بررسی می‌کنیم که:

$$l_i(x_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

پس با نرم به دست $P_n(x)$ تابع $f(x)$ را در $x_0, \dots, x_n$ درون a می‌گیرد و خواص آن

$$P_n(x_i) = f(x_i) = P_n(x_i) = a_0 l_0(x_i) + \dots + a_i l_i(x_i) + \dots + a_n l_n(x_i) = a_i$$

□

درجه n چند جمله‌ای $P_n(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_n(x) = f(x_0) l_0(x) + \dots + f(x_n) l_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

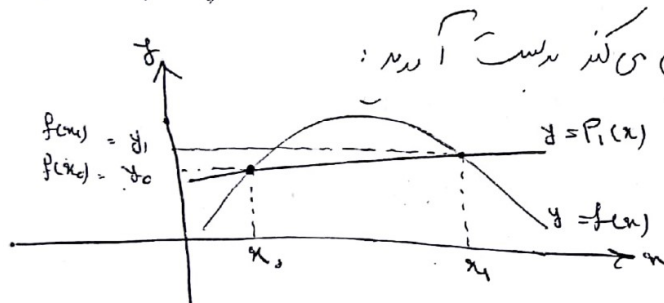
این رابطه را از آنجمله‌ای $P_n(x)$ می‌گویند.

با استفاده از $P_n(x)$ تابع f را به $x=c \neq x_i$ واقع در بازه $[a, b]$ تقریب می‌زنیم:

$$f(c) \approx P_n(c)$$

در واقع $P_n(x)$ در $x=c$ تقریب آن می‌دهد. f تقریب آن می‌دهد. x_i ها می‌باشد.

مثال: فرض کنید مقدار تابع $f(x)$ در نقطه x_0 و x_1 داده شده باشد. چند جمله‌ای درجه اولی که



$f(x)$ را در این نقطه در $x=c$ می‌کند به دست آید:

درستی آن:

$$P_1(x) = y = ax + b \rightarrow \text{چند جمله‌ای درجه اول (مقدار خطی)}$$

$$y_0 = ax_0 + b$$

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{x_0 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -x_1 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_1} \begin{bmatrix} y_0 - y_1 \\ -x_1 y_0 + x_0 y_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P_1(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_0 - x_1} x + \frac{-x_1 f(x_0) + x_0 f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

در روش لایبنتز ۱

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \frac{x f(x_0) - x_1 f(x_0) + x f(x_1) - x_0 f(x_1)}{x_0 - x_1} \\ &= \frac{x (f(x_0) - f(x_1)) - x_1 f(x_0) + x_0 f(x_1)}{x_0 - x_1} \\ &= \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} x + \frac{-x_1 f(x_0) + x_0 f(x_1)}{x_0 - x_1} \end{aligned}$$

برای اینکه بتوانیم به روش لایبنتز با $P_1(x)$ در سطح اول یک خط به دست آوریم؛

در روش لایبنتز برای یک ماتریس مربعی $(n+1) \times (n+1)$ لازم است، با داشتن n چند جمله‌ای استفاده از آن شکل می‌گیرد. در اینجا با استفاده از روش لایبنتز چند جمله‌ای $P_n(x)$ به طریقی مستقیم بدست می‌آید.

مثال: فرض کنید تابع $f(x)$ در سه نقطه زیر داده شده باشد. با استفاده از روش لایبنتز برای $f(x)$ با تقریب نزدیک:

x_i	۰	۰.۱	۰.۱۵
$f(x_i)$	۱	۰.۹۹۰۱	۰.۹۷۸۰

در سطح اول: $P_2(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow$ چند جمله‌ای درجه ۲

$$\left. \begin{aligned} f(x_0) = P_2(x_0) &= ax_0^2 + bx_0 + c \\ f(x_1) = P_2(x_1) &= ax_1^2 + bx_1 + c \\ f(x_2) = P_2(x_2) &= ax_2^2 + bx_2 + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9901 \\ 0.9780 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.01 & 0.1 & 1 \\ 0.0225 & 0.15 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = H^{-1} Z$: برای بدست آوردن a, b, c معادله‌های یک ماتریس 3×3 لازم است.

$$f(0.12) \approx P_2(0.12) = a \times 0.12^2 + b \times 0.12 + c$$

درج ۱ لایه اول:
$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-.1)(x-.15)}{(.0-.1)(.0-.15)} \Big|_{x=.12} = -.4$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-.0)(x-.15)}{(.1-.0)(.1-.15)} \Big|_{x=.12} = -.72$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-.0)(x-.1)}{(.15-.0)(.15-.1)} \Big|_{x=.12} = .12$$

$$P_r(x) = \sum_{i=0}^r f(x_i) l_i(x)$$

$$f(.12) \approx P_r(.12) = 1 \times l_0(.12) + .99 \times l_1(.12) + .1478 \times l_2(.12)$$

$$= .1988$$

درج n برای تقسیم: $P_n(x)$

فرض کنید $P_{n-1}(x)$ درجه $n-1$ باشد و f را در $x_0, \dots, x_{n-1}$ نواحی می‌کند. همین

فرض کنید $P_n(x)$ درجه n باشد و f را در $x_0, \dots, x_n$ نواحی می‌کند.

صورت زیر: $P_n(x)$ مرتبط باشد:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + h_n(x)$$

که بدان $h_n(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n است. برای $i=0, \dots, n-1$ داریم:

$$P_n(x_i) = P_{n-1}(x_i) + h_n(x_i) \Rightarrow f(x_i) = f(x_i) + h_n(x_i)$$

$$\Rightarrow h_n(x_i) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$$

فرض کنید $h_n(x)$ چند جمله‌ای درجه n باشد و $h_n(x_i) = 0$ برای $i=0, \dots, n-1$ باشد.

$$h_n(x) = A_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

که بدان A_n ضرایب است. برای n این ضرایب به کمک f در x_n

$x_0, \dots, x_n$ می‌باشد. با کمک $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ می‌توانیم A_n را بدست آوریم. $\square$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x-x_0) - \dots - (x-x_{n-1}) \quad (*)$$

در نقاط $x_0, \dots, x_n$ داده شده باشد برای هر x یک چند جمله‌ای درجه n که برابر $f(x)$ است
 می‌توانیم بسازیم که در x_0 برابر $f(x_0)$ است.

طبق ردهم (*) برای حالتی که در نقطه x_0, x_1 داده شده باشد چند جمله‌ای درجه 1 که $f(x_0)$ و $f(x_1)$ باشد
 می‌توانیم بسازیم که در x_0 برابر $f(x_0)$ است و در x_1 برابر $f(x_1)$ است.

$$P_1(x) = P_0(x) + f[x_0, x_1](x-x_0) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0)$$

و چون $P_1(x_1) = f(x_1)$ داریم:

$$f(x_1) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x_1-x_0)$$

$$\Rightarrow f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$P_2(x) = P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) \quad \text{برای ترتیب داریم}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \left[f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x-x_j) \right] \quad \text{برای سطح } x_0, \dots, x_n \text{ داریم}$$

برای بسط کردن این فرمول به فرم لگرانژ
 ضرب x^n در هر دو طرف و با x ضرب می‌کنیم.

$$x^n P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$x^n \text{ ضرب} : \sum_{i=0}^n f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{x_i-x_j} = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i-x_j)}$$

$$\sigma_{\text{wp}} \rightarrow x \text{ wp} : f[x_0, \dots, x_n]$$

$$\Rightarrow f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_n] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots \\ &+ \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} + \dots \\ &+ \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

for $n=1$ or $f[x_0, x_1]$; $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

for $n=2$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad : n=2 \text{ or}$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0} \left[\frac{f_0}{x_1 - x_0} + \frac{(x_2 - x_0)f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f_2}{x_2 - x_1} \right]$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0} \left[\frac{f_0}{x_1 - x_0} - \frac{f_1}{x_1 - x_0} + \frac{f_1}{x_1 - x_2} + \frac{f_2}{x_2 - x_1} \right]$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0} \left[\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

x	$f(x)$
0	1
0.1	0.9901
0.18	0.9780

حل مثال قبل بر حسب نتایج:

$$x_0 = 0 \quad f(x_0) = 1 \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = -0.99$$

$$x_1 = 0.1 \quad f(x_1) = 0.9901 \quad f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -0.921$$

$$x_2 = 0.18 \quad f(x_2) = 0.9780$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -0.98333$$

$$P_2(x) = 1 - 0.99(x) - 0.98333x(x - 0.1)$$

$$f(0.12) \approx P_2(0.12) = 0.98883$$

جدول تفاوت‌های متناوب

برای بخش رابطه بین تفاضل تقسیم‌پذیر و دومین جدولی را در دست می‌آید و سپس برای رابطه بین آماره و جدول تفاوت‌های متناوب که در جدول اول در دست می‌آید نسبت به یک برای تسهیل فرایند

نتیجه ارائه می‌دهد:

فرض کنید $P_{k-1}(x)$ جمع $f(x)$ را به $x_0, \dots, x_{k-1}$ درون می‌کند، $Q_{k-1}(x)$ در x_k و $P_k(x)$ را به $x_0, \dots, x_k$ درون می‌کند و $Q_k(x)$ در x_{k+1} و $P_{k+1}(x)$ را به $x_0, \dots, x_{k+1}$ درون می‌کند.

$$P_k(x) = \frac{x - x_0}{x_k - x_0} Q_{k-1}(x) + \frac{x_k - x}{x_k - x_0} P_{k-1}(x) \quad (*)$$

جمع f را به $x_0, \dots, x_k$ درون می‌کند و $Q_k(x)$ در x_{k+1} و $P_{k+1}(x)$ را به $x_0, \dots, x_{k+1}$ درون می‌کند.

$$P_k(x_0) = P_{k-1}(x_0) = f(x_0)$$

$$P_k(x_k) = Q_{k-1}(x_k) = f(x_k)$$

$$P_k(x_i) = \frac{x_i - x_0}{x_k - x_0} Q_{k-1}(x_i) + \frac{x_k - x_i}{x_k - x_0} P_{k-1}(x_i)$$

$$1 \leq i \leq k-1$$

$$\frac{x_k - x_0}{x_k - x_0} f(x_i) = f(x_i)$$



$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + f[x_0, \dots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \quad \text{نقطه‌ای را بیفزاییم}$$

$$f[x_0, \dots, x_k] = x^k \quad \text{ضریب جمله}$$

بقدر برابر x^k ضریب جمله x^k برابر است:

$$\frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_1}$$

$$\Rightarrow f[x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_1}$$

این رابطه شامل تئوری $f[x_1, \dots, x_k]$ است، و ربط در ساختن تئوری به یک مرتبه کمتر است.
 می‌توانیم به روش دیگر این رابطه را به عنوان تئوری تئوری به این تئوری تبدیل کرد.
 برای $n=2$ داریم:

n	$[]$	$[,]$	$[, ,]$	$[, , ,]$	$[, , , ,]$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_3, x_4, x_5]$	$f[x_3, x_4, x_5, x_6]$	$f[x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]$
x_4	$f[x_4]$	$f[x_4, x_5]$	$f[x_4, x_5, x_6]$	$f[x_4, x_5, x_6, x_7]$	$f[x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]$

به روش دیگر می‌توانیم به این روش تبدیل کنیم.

x	0	0.1	0.12
$f(x)$	1	0.9901	0.9788

$$P_1(x) = 1 + (-0.0099)x - 0.0088x(x-0.1)$$

$$\Rightarrow f(0.12) \approx P_1(0.12) = 0.9822$$

x	0	0.1	0.12
$f(x)$	1	0.9901	0.9788
$P_1(x)$	1	0.9901	0.9822

در $P_{k-1}(\bar{x})$, $P_k(\bar{x})$ در قریب $\bar{x}$ و $n = \bar{n}$ ، n بزرگتر باشد $|P_k(\bar{x}) - P_{k-1}(\bar{x})| < \epsilon^{-n}$

نکته $P_{k+1}(\bar{x})$ قریب $f(\bar{x})$ است و n بزرگتر است.

مثال، تابع $f(x)$ در جدول زیر داده شده است. جدول فاصله های تقریبی، از برای این تابع تنظیم گشته پس با استفاده از $P_2(x)$ ، $P_3(x)$ تقریبی از $f(0.21)$ بدست آورده است.

x	0.1	0.15	0.2	0.3	0.5
$f(x)$	1.008	1.0112	1.0198	1.042	1.098

x	0.1	0.15	0.2	0.3	0.5
$f(x)$	1.008	1.0112	1.0198	1.042	1.098
$P_1(x)$	1.008	1.0112	1.0198	1.042	1.098
$P_2(x)$	1.008	1.0112	1.0198	1.042	1.098
$P_3(x)$	1.008	1.0112	1.0198	1.042	1.098

$$\bar{x} = 0.21$$

$$P_0(\bar{x}) = f(x_0) = 1.008$$

$$P_1(\bar{x}) = 1.008 + 0.112(\bar{x} - x_0) = 1.0112$$

$$P_2(\bar{x}) = 1.0112 + 0.0086(\bar{x} - 0.1)(\bar{x} - 0.15) = 1.0198$$

$$P_3(\bar{x}) = P_2(\bar{x}) + 0.022(\bar{x} - 0.1)(\bar{x} - 0.15)(\bar{x} - 0.2) = 1.042$$

$$P_4(\bar{x}) = P_3(\bar{x}) + 0.056(\bar{x} - 0.1)(\bar{x} - 0.15)(\bar{x} - 0.2)(\bar{x} - 0.3) = 1.098$$

$$|P_4(\bar{x}) - P_3(\bar{x})| = 0.056 \epsilon^{-4} < \epsilon^{-4} \Rightarrow f(0.21) = 1.042$$

خطای چند جمله‌ای درک یابی

فرض کنید $P_n(x)$ تابع f را در $x_0, \dots, x_n$ درک یابی کند می دانیم که

$$f(\bar{x}) \approx P_n(\bar{x}) \quad \bar{x} \neq x_i \quad i=0, \dots, n$$

خطای حاصل از درک یابی نزدیک $e(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$ است. برای بدست آوردن

تابع f را با $P_{n+1}(x)$ درک یابی $x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}$ درک یابی می کنیم.

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] (x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$$\Pi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

ب فرض

$$P_{n+1}(\bar{x}) = f(\bar{x}) = P_n(\bar{x}) + f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] \Pi(\bar{x})$$

آنگاه در $x = \bar{x}$ داریم:

$$\Rightarrow e(\bar{x}) = f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}] \Pi(\bar{x}) \quad (*)$$

چون $f(\bar{x})$ مقدار ثابتی نمی بردن $f[x_0, \dots, x_n, \bar{x}]$ را بدست آورده اند یعنی بدانند که $(*)$ برای محاسبه خطا در $\bar{x}$ استفاده نمود. در ادامه ثابت می شود که اگر f تابعی مشتق پذیر تا مرتبه $n+1$ باشد در $[a, b]$ آنگاه تفاضل قسم $n+1$ به f در نقطه مناسب است با مشتق مرتبه $(n+1)$ ام تابع f در نقطه ای واقع در بازه (a, b) .

$$e(x) = f(x) - P_n(x) \quad x \neq x_i \quad i=0, \dots, n$$

فرض کنید تابع خطا $e(x)$

باشد. چون $e(x_i) = 0$ برای $i=0, \dots, n$ پس باید به قضیه رول $e'(x)$ در n نقطه $e''(x)$ برای $n-1$ نقطه $e^{(n)}(x)$ برای n نقطه در (a, b) است مثل $\theta \in (a, b)$

$$e^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f[x_0, \dots, x_n] n! \Rightarrow f^{(n)}(\theta) - f[x_0, \dots, x_n] n! = 0$$

$$\Rightarrow f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}$$

$$e(\bar{n}) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \pi(\bar{n})$$

با جایگزینی در (*) داریم:

چون θ در بازه (a, b) تغییر می کند نمی توان خط را به خط مستقیم تبدیل کرد و می توان

$$\max |f^{(n+1)}(\theta)| = M$$

$$a < \theta < b$$

پس از آنکه برای بالای خطای $f(\bar{n}) \approx P_n(\bar{n})$ برابر است با:

$$|f(\bar{n}) - P_n(\bar{n})| \leq \frac{M}{(n+1)!} |\pi(\bar{n})| \quad (**)$$

رابطه (**) نیز برای خطای موهومی در نقطه مشخص $\bar{n}$ است. در قسمت بعد برای خطای موهومی در بازه (a, b) مد نظر باشد آنرا داریم:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\pi(x)|$$

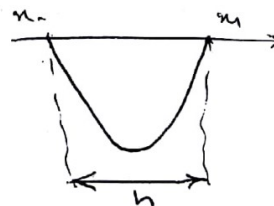
مثال: خطای مدل برای خطی تابع $f(x)$ در $x_0 = a$ ، $x_1 = a+h$ داریم:

$$e(x) = f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\theta)}{2!} (x-x_0)(x-x_1)$$

برابر است با:

$$|e(x)| = |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M}{2!} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |(x-x_0)(x-x_1)|$$

$$\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)$$



$$\pi'(x) = x - x_1 + x - x_0 = 2x - x_0 - x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

$$\pi(x) = \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_0\right) \left(\frac{x_0 + x_1}{2} - x_1\right) = \frac{x_1 - x_0}{2} \frac{x_0 - x_1}{2} = -\frac{(x_1 - x_0)^2}{4} = -\frac{h^2}{4}$$

$$\Rightarrow \max |\pi(x)| = h^2/4 \Rightarrow |e(x)| \leq \frac{M h^2}{8}$$

مثال: تابع $f(x) = \cos x$ در بازه $[0, 1]$ مرتبه است این فاصله را به قسمت مساوی تقسیم

می کنیم تا فاصله های $[x_i, x_{i+1}]$ به دست آید. $h = \frac{1}{n}$ به دست آید در هر یک از

cho dùn i

$$\frac{h^r}{n} < 1 \cdot 10^{-8} \Rightarrow h < r, 1 \times 10^{-r} \quad \frac{\delta}{n} < r, 1 \times 10^{-r} \Rightarrow n > 10^r, 4 \times 10^r$$

$$u_0 = 0 \quad u_1 = 0.12 \quad f_0 = 1, \quad f_1 = 0.9994$$

$$P_1(1.18) = 1.99948 \quad \cos(1.18) = 0.99949$$

$$e(x) = \frac{f^{(m)}(\theta)}{m!} \pi(x)$$

$$|e_n| \leq \frac{1}{n!} \max_{n_0 \leq n \leq n_1} |f^{(n)}(\xi)| \cdot \max_{n_0 \leq n \leq n_1} |r(n)|$$

$$= (n-a)[(n-a)^r - n^r] = (n-a)^{r+1} - n^r(n-a)$$

$$\pi'(x), \pi'(n-a)^r - h^r = 0 \Rightarrow (n-a)^r, h^r/r \Rightarrow n-a = \pm h/\sqrt[r]{r}$$

$$\max |r(n)| = \left| \frac{\pm h^r}{r\sqrt{r}} - h^r (\pm h/\sqrt{r}) \right| = h^r \left| \frac{\pm 1}{r\sqrt{r}} \mp \frac{r}{r\sqrt{r}} \right| = \frac{r h^r}{r\sqrt{r}}$$

$$\max |f^{(4)}(x)| = M \Rightarrow |e(x)| \leq \frac{1}{4!} M \times \frac{2h^4}{3\sqrt{3}} = \frac{M\sqrt{3}h^4}{24}$$

$$x_0 \leq x \leq x_2$$

مثال ۵: $f: [a, b]$ را در نظر بگیرید. $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ در نظر بگیرید. x_{i-1}, x_i, x_{i+1} از آن به ترتیب می‌گیریم.

آنچه می‌خواهیم نقطه نقطه در نظر بگیریم $g_r(x)$ است که n (تعداد تقسیم) می‌باشد.

$$|f(x) - g_r(x)| < 10^{-\varepsilon}$$

$$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x \quad f''(x) = -\cos x \quad f'''(x) = \sin x$$

$$0 \leq x \leq 1.5$$

$$M = \max |f'''(x)| = \max |\sin x| = \sin 1.5 \Rightarrow \frac{(\sin 1.5)\sqrt{3}h^4}{24} < 10^{-\varepsilon}$$

$$-1.5 \leq x \leq 1.5$$

$$\Rightarrow h^4 < \frac{24 \times 10^{-\varepsilon}}{\sqrt{3} \sin 1.5} \Rightarrow h < 0.128 \quad h = \frac{1.5}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{1.5}{n} < 0.128 \Rightarrow n > \frac{1.5}{0.128} \Rightarrow n > 11.7 \Rightarrow n \geq 12$$

نتیجه: در این مثال با چند جمله‌ای درجه ۱۱ می‌توانیم $f(x)$ را در بازه $[0, 1.5]$ با دقت $10^{-\varepsilon}$ تقریب بزنیم. تعداد تقسیمات (n) که برای این لازم دارد.

مثال ۵: تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ را در $[0.1, 0.6]$ در نظر بگیرید. این بازه را با فواصل مساوی

$h = 0.1$ تقسیم کرده‌ایم. جدول ضرایب تقسیم شده را تنظیم کنید. سپس با استفاده از جدول

یابی به هم، هم، هم، تقریبی برای $f(0.15)$ بدست آورید. (این تقریب تا چند رقم اعشاری درست درود؟)

	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
۰	۱			
۰.۱	۰.۹۰۹۱	۰.۹۰۹	۰.۷۵۵	۰.۵۴۴۷
۰.۲	۰.۸۳۳۳	۰.۷۵۵	۰.۵۴۴	
۰.۳	۰.۷۵۴۹	۰.۵۴۴		

$$P_1(x) = P_0(x) + f(x_1, x_0)(x-x_0) = 1 + (-1/9.9.)x$$

$$P_2(x) = P_1(x) + f(x_1, x_0, x_2)(x-x_0)(x-x_1) = 1 - 1/9.9.x + 1/788.x(x-1/9)$$

$$P_3(x) = P_2(x) + f(x_1, x_0, x_2, x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = 1 - 1/9.9.x + 1/788.x(x-1/9) + (-1/8448)x(x-1/9)(x-1/2)$$

$$\Rightarrow P_1(1/18) = -1/8448 \times 1/2$$

$$P_2(1/18) = 1/8448 \times 1/2$$

$$\left| P_1(1/18) - P_2(1/18) \right| = 1/8448 \times 10^{-3}$$

تفاوت نسبی

$$\Rightarrow f(1/18) \approx 1/849$$

$$e(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \pi(x) \quad n=3$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad f'''(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5} \quad \cdot \leq x \leq 1/2 \quad \text{Max } |f^{(4)}(x)| = 24 \quad \cdot \leq x \leq 1/2$$

$$|e(x)| \leq \frac{24}{4!} \times \frac{x(x-1/9)(x-1/2)(x-1/3)}{n=1/18^4} = \frac{1/4 \times 10^{-8}}{10^{-8}}$$

$$P_3(1/18) \quad |f(1/18) - P_3(1/18)| = 1/4 \times 10^{-8} < 1/4 \times 10^{-8}$$

۲- مشتق، مشتق دوم، مشتق سوم (در این بخش به یاد داشته باشید که مشتق دوم و سوم را در این بخش به یاد داشته باشید)

۱- مشتق اول

منظور از مشتق اول مشتق است $f'(x)$ است $x=c$ و مشتق دوم $f''(x)$ است $x=c$ و مشتق سوم $f'''(x)$ است $x=c$

نقطه c در $[a, b]$ واقع است و a, b, c در $[a, b]$ قرار دارند

در این تقریب $f(x)$ تابع f را در نقاط داده شده درون بازه $[a, b]$ می‌کنیم

$$f(x) \approx P_n(x) \Rightarrow f'(x) \approx P'_n(x)$$

مثلاً، تابع $f(x)$ در نقاط x_0, x_1, x_2 داده شده است. بازه $[a, b]$ را در نظر بگیرید. در این تقریب، $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ را تقریب می‌زنیم.

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$\Rightarrow P'_1(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثلاً، تابع $f(x)$ در نقاط $x_0 = a - h, x_1 = a, x_2 = a + h$ داده شده است. در این تقریب، $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ را تقریب می‌زنیم.

بازه $[a, b]$ را در نظر بگیرید. در این تقریب، $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$ را تقریب می‌زنیم.

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$f'(x) \approx P'_2(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2] \left(\frac{x - x_1 + x - x_0}{x_1 - x_0 - x_1} \right)$$

$$f''(x) \approx P''_2(x) = f[x_0, x_1, x_2] \times 2$$

x_0	$f(x_0)$	$>$	$f[x_0, x_1]$	$>$	$f[x_0, x_1, x_2]$
x_1	$f(x_1)$	$>$	$f[x_0, x_1]$	$>$	$f[x_0, x_1, x_2]$
x_2	$f(x_2)$	$>$	$f[x_0, x_1]$	$>$	$f[x_0, x_1, x_2]$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{h} \quad f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{(f_2 - f_1)/h - (f_1 - f_0)/h}{2h} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$$

164

$$f'(n) \approx \frac{f_1 - f}{h} + \frac{f_1 r - r f_1 + f}{r h r} \quad \left(\frac{r x_c - x_1 - n_1}{-h} \right)$$

$$= \frac{rF_1 - rF_2 - rF_3 + rF_4 - rF_5}{r_h} = \frac{rF_1 - rF_2 - rF_3}{r_h}$$

$$f'(x_1) \approx \frac{f_1 - f}{h} + \frac{f_r - r f_1 + f}{r h r} \cdot \left(\cancel{r x_1 - x_0} \right)$$

$$\frac{\cancel{r f_1} - \cancel{r f_1} + f_r - \cancel{r f_1} + f}{r_h} = \frac{f_r - f}{r_h}$$

$$f''(x) \approx \frac{f_r - r f_1 + f_0}{h^2}$$

$$f^4(m) \approx$$

کونینا ہمارے جامع کے نام سے خط لکھ کر دے دے اس کے لئے ۔

رانده است و در رانده شدن
 $f(1,8)$ را تقویت میزند

	۱	۲
u	۰.۷۵	۰
f	۱.۱۲۵	۱۲

دران ایس: عبداللہ بن عبدالمطلب

۱
ہی دارم

دایره‌های a و b در مرکز O و P قرار دارند. OP را به Q وصل می‌کنیم. Q مرکز دایره a است. Q مرکز دایره b است. Q مرکز دایره a است. Q مرکز دایره b است.

که این نقطه نمی توان که چند ملاحظاتی درم ۳ به خط کشیده پیدا نمود و حداقل ۲ نقطه نیز در آن است

در سن ایامی ممتد به پنج روز در این در نظر گرفته شد تا بتواند

$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{H(x)} \right) = -\frac{H'(x)}{H^2(x)}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

ایک دفعہ یہ لکھ

میتوانیم به سادگی نشان دهیم که $P \leq P^*$ ، a, b, c و d در P قرار دارند.

	[]	[,]	[, ,]	[, , ,]
a	f(a)			
a	f(a)	f'(a)	A	B
b	f(b)	f'(b)		
		f[a, b]	$\frac{f[a, b] - f(a)}{h}$	$\frac{f'(b) + f'(a) - r f[a, b]}{h^r}$
			$\frac{f'(b) - f[a, b]}{h}$	
				(n - a - b)

$$H_r(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + A(x-a)^r + B(x-a)^r(x-b)$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + A(x-a)^r + B(x-a)^r - Bh(x-a)^r$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + (A-Bh)(x-a)^r + Bh(x-a)^r$$

$$A = \frac{f[a, b] - f'(a)}{h} \quad B = \frac{1}{h^r} (f'(b) + f'(a) - r f[a, b])$$

چونکه $H_r(x)$ در $x=a$ و $x=b$ برابر با $f(x)$ است پس در $x=a$ و $x=b$ مشتق $H_r(x)$ نیز برابر با $f'(x)$ است.

$$H_r(a) = f(a)$$

$$H_r(b) = f(a) + f'(a) \cdot h + (A-Bh)h^r + Bh^r$$

$$= f(a) + \cancel{f'(a)h} + \cancel{Ah^r}h (f[a, b] - f'(a))$$

$$= f(a) + f(b) - f(a) = f(b)$$

$$H'_r(x) = f'(a) + r(A-Bh)(x-a) + rB(x-a)^r$$

$$\Rightarrow H'_r(a) = f'(a)$$

$$H'_r(b) = f'(a) + r(A-Bh)h + rBh^r = \cancel{f'(a)} + r(f[a, b] - f'(a))$$

$$+ f'(b) + \cancel{f'(a)} - r f[a, b] = f'(b)$$

چونکه $H'_r(x)$ در $x=a$ و $x=b$ برابر با $f'(x)$ است پس در $x=a$ و $x=b$ مشتق $H'_r(x)$ نیز برابر با $f''(x)$ است.

مثال: منحنی $y = f(x)$ از نقاط جدول زیر می‌گذرد. فرض کنید $f(x)$ از مرتبه ۳ باشد.

مطلوب است $k = \frac{f'(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$ در $x = 0.15$

x	0	0.1	0.2	0.3
y	0	0.997	0.974	0.918

	$[0]$	$[0.1]$	$[0.2]$	$[0.3]$
0	0	0.997		
0.1	0.997	0.997	-0.1	
0.2	0.974	0.974	-0.11	-0.2447
0.3	0.918	0.918		

$$P_3(x) = 0.997x - 0.1x(x-0.1) - 0.2447x(x-0.1)(x-0.2)$$

$$P_3'(x) = 0.997 - 0.1(2x-0.1) - 0.2447(2x-0.1+0.2)$$

$$P_3''(x) = -0.2 - 0.2447(4x-0.4)$$

$$\Rightarrow f'(0.15) \approx 0.997 - 0.1(2 \times 0.15 - 0.1) - 0.2447(2 \times 0.15 + 0.2)$$

$$= 0.9777$$

$$f''(0.15) \approx -0.2 - 0.2447(4 \times 0.15 - 0.4) = -0.28$$

$$\Rightarrow k = \frac{0.28}{(1+0.9777^2)^{3/2}} \approx 0.1024$$

مثال: معادله دفرانسیل $y'' - 2y' + y = 0$ در $[0, 0.5]$ مرتبه ۳ است.

با استفاده از تقریب y ، y' و y'' جواب معادله را به دست آورید.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad h = 0.1$$

$$y''(x_i) - 2y'(x_i) + y(x_i) = 0$$

معادله دیفرانسیل داده شده را در $x = x_i$ میسریم

در این مرحله باید جوابی تقریبی میسریم که معادله تفاضلی تبدیل می شود

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h} + y_i = 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - 1 \cdot (y_{i+1} - y_{i-1}) + y_i = 0$$

$$11 \cdot y_{i-1} - 199y_i + 9 \cdot y_{i+1} = 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$i=1 \Rightarrow 11 \cdot y_0 - 199y_1 + 9 \cdot y_2 = 0 \Rightarrow -199y_1 + 9 \cdot y_2 = -11 \quad (1)$$

$$i=2 \Rightarrow 11 \cdot y_1 - 199y_2 + 9 \cdot y_3 = 0 \quad (2)$$

$$i=3 \Rightarrow 11 \cdot y_2 - 199y_3 + 9 \cdot y_4 = 0 \quad (3)$$

$$i=4 \Rightarrow 11 \cdot y_3 - 199y_4 + 9 \cdot y_5 = 0 \Rightarrow 11 \cdot y_3 - 199y_4 = -222.1 \quad (4)$$

$$\begin{cases} -199y_1 + 9 \cdot y_2 = -11 \\ 11 \cdot y_1 - 199y_2 + 9 \cdot y_3 = 0 \\ 11 \cdot y_2 - 199y_3 + 9 \cdot y_4 = 0 \\ 11 \cdot y_3 - 199y_4 = -222.1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -199 & 9 & 0 & 0 \\ 11 & -199 & 9 & 0 \\ 0 & 11 & -199 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & -199 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 0 \\ -222.1 \end{bmatrix} = b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.2181 \\ 1.4444 \\ 1.7829 \\ 1.140 \end{bmatrix}$$

آسترال نری عددی

هند از آسترال نری عددی ترتیب $I = \int_a^b f(x) dx$ است، مقید به $f(x)$ و x

نقطه $n+1$ نقطه جدا از هم $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$

دارد سری $f(x)$ به صورت زیر:

$$f(x) = P_n(x) + e(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} P_n(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx + E(x)$$

برای $A_i = \int_a^b l_i(x) dx$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) = A_0 f_0 + A_1 f_1 + \dots + A_n f_n$$

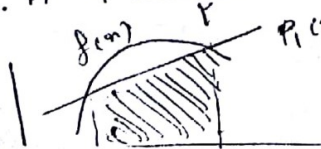
فرض کنیم f را به $x_0 = a$ و $x_1 = b$ در $(b-a) = h$ دو نقطه (مستقیم) تقسیم کنیم:

$$f(x) \approx f(x_0) + f[x_0, x_1] (x - x_0) = P_1(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \left(f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} (x - x_0) \right) dx \quad dx = du$$

$$= \int_0^h \left(f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} u \right) du = \left[f_0 u + \frac{f_1 - f_0}{2h} u^2 \right]_0^h$$

$$= f_0 h + \frac{f_1 - f_0}{2} h = \frac{h}{2} (f_1 + f_0) = \frac{b-a}{2} (f(b) + f(a))$$



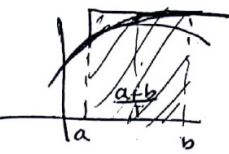
این روش به روش ذوزنقه معروف است.

Trapezoid Rule

نقطه میانه، در وسط هر بازه قرار می‌گیرد.

$$f(x) \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx$$



$$= \underbrace{(b-a)}_h f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (\text{میان})$$

(Midpoint Rule) این روش، یک درجه است.

این روش برای بازه‌های کوچک و برای تقریب از انتگرال‌ها مناسب است.

اگر f را در n نقطه $x_0 = a, x_1 = a+h, \dots, x_r = a+rh = b$ تقسیم کنیم، داریم:

$$f(x) \approx f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} (x - x_0) + \frac{\frac{f_r - f_1}{h} - \frac{f_1 - f_0}{h}}{rh} (x - x_0)(x - x_1)$$

$$= f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} (x - a) + \frac{f_0 - rf_1 + f_r}{rhr} (x - a)(x - a - h)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \left[f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} (x - a) + \frac{f_0 - rf_1 + f_r}{rhr} (x - a)(x - a - h) \right] dx$$

$$= \int_0^{rh} \left[f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h} u + \frac{f_0 - rf_1 + f_r}{rhr} u(u - h) \right] du$$

$$= \cancel{rh f_0} + \frac{f_1 - f_0}{h} \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{f_0 - rf_1 + f_r}{rhr} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h \cdot h^2}{2} \right)$$

$$= \frac{h}{3} f_0 + \frac{4h}{3} f_1 + \frac{h}{3} f_r = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_r)$$

این روش، یک درجه است (Simpson).

مثال: $\int_1^{11} \frac{\sin x}{x} dx$ را با روش مستطین حساب کنید

$a=1, b=11$

(۱) روش درخت:

$$I = \frac{11-1}{2} \left(\frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 11}{11} \right) = 0.10828$$

(۲) روش نقطه میانی:

$$I = (11-1) \cdot \frac{\sin 1.05}{1.05} = 0.10824$$

(۳) روش سیمپسون

$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2} = 1.05, x_2 = b \Rightarrow h = 0.05$

$$I = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) = \frac{0.05}{3} \left(\frac{\sin 1}{1} + 4 \frac{\sin 1.05}{1.05} + \frac{\sin 11}{11} \right) = 0.10824$$

فرمول‌های مرتب استوار لری ۱

استوار: $\int_a^b f(x) dx$ مفروض است. $[a, b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم

نقاط

برشیم

$(h = \frac{b-a}{n})$ $x_i = x_0 + ih, i=0, 1, \dots, n$

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

با استفاده از روش درخت داریم:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1}) = \frac{h}{2} (f_0 + f_1 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + f_n)$$

$$= \frac{h}{2} (f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n)$$

فرمول درخت مرتب

توجه: $f = 1$ و $x = x_i$ با چندین بار تکرار شدن x_i (نقطه میانی) $f(x) = f(x_i) = f_i$

فرمول مستطین مرتب

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i dx = \sum_{i=0}^{n-1} h f_i = h \sum_{i=0}^{n-1} f_i$$

دری که تشریح $\int_a^b f(x) dx$ بر روی $[a, b]$ با n قسمت که n در n (است) تقسیم می شود. و $h = \frac{b-a}{n}$ و x_i ها

$[x_{i-1}, x_{i+1}]$ به dep و rh میسازد. $i = 1, \dots, n-1$ ، در هر

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$$

المتتالية $\{x_i\}$ هي متتالية $\{x_i\}$ في $\mathbb{R}$ ،

$$I \approx \frac{h}{v} [f. + \epsilon f_1 + f_r + f_r + \epsilon f_{r+1} + f_2 + \dots + f_{n-r} + \epsilon f_{n-1} + f_n]$$

$$= \frac{n}{r} \left(f_0 + r \sum_{i=1}^{n/r} f_{ri-1} + r \sum_{i=1}^{n/r-1} f_{ri} + f_n \right)$$

السَّامِعُ لِمَنْ فَرَسَ نَظْمَهُ رَاطِئًا $[n_{i-1}, n_{i+1}]$ فَرَسَ كَرِيمًا دِينَ رُوسِ نَزِيرًا رَاضِيًا دِينَ سَيِّدًا

مثال: انتگرال $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$ را بر حسب $n = 4$ به صورت f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 بسط تیلور مرتبه 4 در $x=0$ بنویسید.

الف) $I = \frac{n}{r} (P + r \sum_{i=1}^{n-1} P_i + P_n)$ $n = 1/1.25 = 0.8$
 $= \frac{0.8}{r} (1 + r(e^{0.125r} + e^{0.125r} + e^{0.125r}) + e) = 1.49.4\%$

عسکری (ب)

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{-j\omega}{\omega} (1 + \epsilon (f_r + f_w) + r f_r + f_z) \\ &= \frac{-j\omega}{\omega} (1 + \epsilon (e^{j\omega r} + e^{-j\omega r}) + r e^{j\omega r} + e) \\ &= 1.59 \text{ V} \end{aligned}$$

روش نصف به نصف

روش نصف به نصف

نرم‌های سری هم : مشتق سری و انتگرال سری سری

فصل چهارم کتاب سنگر

نرم‌های ۴-۱ ، ۸-۱۵ ، ۲۴-۲۳

حل معادله غیر خطی $f(x) = 0$: روش‌های عددی

برای بدست آوردن جواب معادله $f(x) = 0$ به روشی دنباله‌ای از اعداد $x_1, x_2, \dots, x_n$ را بدست می‌آوریم به شرطی که شرایطی برقرار باشد. حد این دنباله ریشه معادله $f(x) = 0$ است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

روش نصف به نصف (Bisection)

در روش‌های عددی برای محاسبه ریشه معادله $f(x) = 0$ به روشی دنباله‌ای از اعداد $x_1, x_2, \dots, x_n$ را بدست می‌آوریم به شرطی که شرایطی برقرار باشد.

(۱) $|f(x_n)| < \epsilon_1$ ← ϵ_1 عددی کوچک ← ϵ_1 به ازای x_n که ریشه معادله است

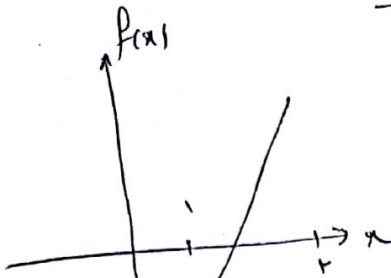
(۲) $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon_2$ ← ϵ_2 فاصله بین دو جمله متوالی دنباله از ریشه معادله کمتر شود

(۳) $n > N$ ← تعداد تکرار (حداکثر دنباله) از ریشه معادله بیشتر نشود

روش نصف به نصف یا بایسکسی (Bisection)

فصل ۴ می‌خواهیم جواب معادله $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ را بدست آوریم. (این معادله دارای

کتاب ریشه در نامیده (۱, ۲) است نمودار $y = f(x)$ را پس مطلب را نشان می دهیم.



$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(2) = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1)f(2) < 0$$

به علاوه

در نیمه طبقه عدد صحیحی، تابع f صفاً در بازه (۱, ۲) یک ریشه دارد
بازه شامل ریشه را پشت می کشیم، مطابق بازه اولی تقریب ریشه معادله را

$$m = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

با محاسبه خطای برابر با نصف طول شامل ریشه میانی:

$$e_1 < \frac{2-1}{2} = 0.5$$

چون $f(1.5) = 1.875 > 0$ و $f(1) < 0$ پس بازه طبقه عدد صحیحی ریشه (۲) در بازه (۱, ۱.۵) مکرر در دومین تقریب $m = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$ با محاسبه خطای

$$e_2 < \frac{1.5-1}{2} = 0.25$$

است. در همین

$$\left. \begin{array}{l} f(1.25) = -0.298 < 0 \\ f(1.5) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow r \in (1.25, 1.5)$$

$$m = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$$

$$e_3 < \frac{1.5-1.25}{2} = 0.125$$

با اطمینان روند نامیده شامل ریشه را دقیقاً در طبقه طول آن که در معنی شده است.
روش دیگر اینست. در این حالت تقریب بدست آمده دارای n رقم درست است (نیم درصد)

الگوریتم روش نصف

۱۲۴ فرض کنید تابع $f(x)$ در نامیده $[a, b]$ پیوسته و معادله $f(x) = 0$ در این نامیده

کدام دانه باشد. پس $f(a_n)f(b_n) < 0$. به ترتیب در دنباله ای مقدار r (درست صادر)

for $n = 0, 1, \dots$

$$m = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\text{if } f(a_n)f(m) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = m$$

$$\text{if } f(b_n)f(m) < 0 \Rightarrow a_{n+1} = m, b_{n+1} = b_n$$

end for

تکرار تا وقتی انجام می دهیم که $|b_n - a_n| < 10^{-k}$ باشد. در این مرحله خطای تقریب $e_n < 10^{-k}$ است. پس تقریب بدست آمده

در این حالت دارای k رقم درست است به علاوه r به حاصل $a_n < r < b_n$ تکرار در r پس با انتخاب a_n یا b_n یا نقطه وسط از به عنوان جواب تقریبی k رقم درست اینار درست خواهد آمد

$$a_0 = 1, 3, 2, 4, 7, 1, 5 \quad f(a_0) < 0$$

$$b_0 = 1, 3, 2, 4, 7, 1, 8, 6 \quad f(b_0) > 0$$

$$b_1 - a_1 = 0, 10000009 > 9 \times 10^{-7} > 0, 9 \times 10^{-4} < 10^{-4}$$

$$e_1 < 0, 5 \times 10^{-4}$$

$$m = 1, 3, 2, 4, 7, 1, 9, 8 \Rightarrow r = 1, 3, 2, 4, 7, 1, 8, 6$$

در این بین بین خطای دو مرحله صدائی رابطه $e_n = \frac{e_{n-1}}{2}$ برقرار است زیرا

$$\left. \begin{array}{l} b_n = b_{n-1} \\ a_n = m = \frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow e_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

$$= \frac{b_{n-1} - \frac{b_{n-1} + a_{n-1}}{2}}{2} = \frac{b_{n-1}}{2} - \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{e_{n-1}}{2}$$

$$e_n = \frac{e_{n-1}}{2} = \frac{e_{n-2}}{2^2} = \frac{e_{n-3}}{2^3} = \dots = \frac{e_0}{2^n}$$

$$= \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

با استفاده از این رابطه می توان حداقل تعداد تکرار را برای رسیدن به دقت مناسب را بدست آورد. مثلاً برای بدست آوردن جواب معادله مثال قبلی با دقت ۱۰ رقم اعشاری

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} < 10^{-9}$$

باز داریم [۲، ۲] تا ۱۰

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Rightarrow 1 < 2^n \times 10^{-9} \Rightarrow 2^n > 10^9$$

$$\Rightarrow n \log 2 > 9 \Rightarrow n > 9 / \log 2 = 27.9$$

پس حداقل ۲۸ بار تکرار لازم است.

تمرین ۲: معادله دیرانگلی $y'' + y = x - 1$ را با استفاده از روش های درجه ۲ به بازه $0 \leq x \leq 1.3$

با شرایط مرزی $y(0) = 0$, $y(1.3) = 1.3$ در نقاط مشای استفاده $x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, x_3 = 0.3$

حل کنید: $(y(1.1), y(1.2), y(1.3))$ را بدست آورید.

روش تکرار نقطه ثابت یا روش تکرار ساده
در این روش نقطه ثابت برای حل معادله $f(x) = 0$ را برای یک جواب به بازه (a, b) با شرط $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ در نظر می گیریم. ابتدا تابع $g(x)$ را طوری انتخاب می کنیم که معادلات $f(x) = 0$ و $x = g(x)$ را داشته باشیم.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$$

نمونه تکرار نقطه ثابت

در حالتی در (۲) دنباله

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

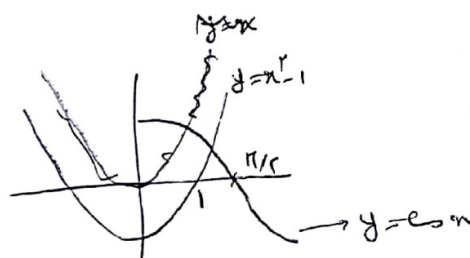
$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

را در کتب می بینم. و در اسی شرایط شخصی باشد و ساله و سبب آمده و همراه ۲ است یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$$

در این قسمت $x_{n+1} \approx x_n$ و $g(x_n) \approx x_n$ یعنی x_n تقریب مناسبی برای α است. برگردیم به (۲) را وقتی متوقف می‌کنیم که برای $\epsilon = 10^{-k}$ داریم $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$

مثال: معادله $f(x) = x^2 - 1 - \cos x = 0$ مفروض است. اولاً تا جمله این تقسین نشده شامل
روش هسبت این معادله باشد پس با روش گزیر نقطه ثابت این جواب را با
سه رقم درست این روش آوری.



حل: نقطه ریشه یابی $y = \cos x$, $y = x^2 - 1$
جواب: $(1, 1, 2.8)$ از طریق روش

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= -\infty < 0 \\ f(1, r_0) &= 0, r_0 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1) f(1, r_0) < 0$$

$$x^r = 1 - \cos x = 0 \Rightarrow x^r = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 + \cos x} \\ x = \frac{1 + \cos x}{x} \end{cases}$$

$$\cos x \leq x^r - 1 \Rightarrow x = \cos^{-1}(x^r - 1) \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$x = x^r - 1 - \cos \theta + x \quad \textcircled{2} = g_2(x)$$

$$x_{k+1} = \sqrt{1 + \cos \theta_k} \quad k=0,1,\dots \quad \therefore f(1), x_0=1 \quad , \quad g(x) = \sqrt{1 + \cos \theta}$$

$$\sqrt{A} \quad x_1 = 1,2 \pm 11 \quad x_2 = 1,18 \cdot 4 \quad x_3 = 1,11 \cdot 44 \quad x_4 = 1,11 \cdot 46 \quad x_5 = 1,11 \cdot 41 \quad x_6 = 1,11 \cdot 49$$

$$x_7 = 1,1797 \quad x_8 = 1,1744 \quad x_9 = 1,1748 \Rightarrow r = 1,174$$

شرایط جمع g برای اینکه دنباله برگیرنده مقدار ممتد باشد:

۱- برای $x \in [a, b]$ داشته باشیم $g(x) \in [a, b]$

۲- $|g'(x)| < 1 \quad x \in [a, b]$

$$1 < x < 1,25 \quad 0,32 < \cos x < 0,82 \quad \text{برای مدل قبل:}$$

$$\sqrt{1+\cos x} \quad 1,32 < 1 + \cos x < 1,82$$

$$\Rightarrow 1,18 < \sqrt{1+\cos x} < 1,22 \Rightarrow g(x) \in (1, 1,25)$$

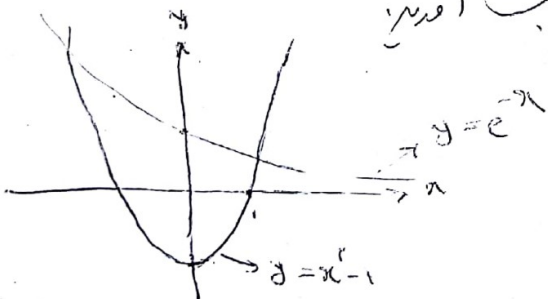
$$g'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} \Rightarrow |g'(x)| = \frac{|\sin x|}{2\sqrt{1+\cos x}} < 1$$

$$|\sin x| < 1 \quad 1 < x < 1,25 \Rightarrow \cos x > 0$$

~~ممتد~~

سؤال: معادله $e^{-x} - x^2 + 1 = 0$ فرض است. با روش تکرار نقطه ثابت درجه دوم را

نقطه این معادله را به رسم رسم کنید این نقطه را پیدا کنید



نقطه $(1, 1,25)$ است

$$f(1) = 1,37 > 0$$

$$f(1,25) = -0,28 < 0$$

$$e^{-x} - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = e^{-x} + 1 \Rightarrow x = \sqrt{1 + e^{-x}} = g_1(x)$$

$$e^{-x} = x^2 - 1 \Rightarrow -x = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow x = -\ln(x^2 - 1) = g_2(x) \quad \langle \ln(1,25-1) \rangle$$

$$1 < x < 1,25 \Rightarrow 1 < x^2 < 1,25^2 \Rightarrow 0 < x^2 - 1 < 1,25^2 - 1 \Rightarrow -\infty < \ln(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow -\ln(1,25^2 - 1) < g_2(x) < \infty \Rightarrow g_2(x) \notin (1, 1,25) \quad \text{قرص}$$

$$1 < x < 1,25 \Rightarrow e^{-1,25} < e^{-x} < e^{-1} = 0,368 \Rightarrow 1,287 < 1+e^{-x} < 1,368$$

$$\Rightarrow \sqrt{1,287} < g(x) < \sqrt{1,368} = 1,17 \Rightarrow g(x) \in (1, 1,25)$$

$$|g'(x)| = \frac{|-e^{-x}|}{2\sqrt{1+e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}} < 1 \text{ for } x > 0 \Rightarrow \text{تابع متناهی برای } x > 0 \text{ تکثیر نقطه ثابت است.}$$

$$x_{k+1} = \sqrt{1+e^{-x_k}}$$

$$x_0 = 1, 1,1494, 1,1648, 1,1682, 1,1697, 1,1698$$

$$1,1698$$

$$\Rightarrow r = 1,168$$

مرتبه هدرایی - سرعت هدرایی

فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ هدرایی r باشد، $e_n = r - x_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c \neq 0 \text{ باشد، آنگاه } P \text{ مرتبه هدرایی دنباله می گوئیم.}$$

برای دنباله ای که با روش تکثیر نقطه ثابت قوی باشد، $x_{k+1} = g(x_k)$ بگوئیم،

r نقطه ثابت g است داریم:

$$e_{n+1} = r - x_{n+1} = g(r) - g(x_n)$$

$$g(x_n) = g(r) + (x_n - r)g'(r) + \frac{(x_n - r)^2}{2!}g''(r) + \dots$$

بسط g حول r

$$\Rightarrow x_{n+1} = r + (x_n - r)g'(r) + \frac{(x_n - r)^2}{2!}g''(r) + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = g'(r) + \frac{x_n - r}{2!}g''(r) + \dots = \frac{e_{n+1}}{e_n}$$

نر $g'(r) \neq 0$ باشد داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = |g'(r)| \neq 0$$

در نتیجه مرتبه هدرایی روش تکثیر ساده نر $g'(r) \neq 0$ باشد، که است.

$$g(x_n) = g(r) + (x_n - r)g'(r) + \frac{1}{2!}(x_n - r)^2 g''(r) + \frac{1}{3!}(x_n - r)^3 g'''(r) + \dots$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = r + \frac{1}{2!}(x_n - r)^2 g''(r) + \frac{1}{3!}(x_n - r)^3 g'''(r) + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)^2} = \frac{1}{2!} g''(r) + \frac{1}{3!}(x_n - r) g'''(r) + \dots = \frac{e_{n+1}}{e_n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n^2} \right| = \frac{1}{2!} |g''(r)| \neq 0 \Rightarrow p=2 \quad \text{مرتبه همرازی}$$

یعنی در این تکرار نقطه ثابت r ، $g'(r) = 0$ ، $g''(r) \neq 0$ ، بنابراین مرتبه همرازی ۲ است.

مثال: تابع $g(x) = \frac{1}{5} \left(4x + \frac{3}{x^2} \right)$ را در نظر بگیرید. دنباله ای را بسازید که از رابطه

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

تولید می شود. حد این دنباله را بیابید. مرتبه همرازی این دنباله چیست؟

حل: این دنباله نقطه ثابت g است، یعنی $x = g(x)$ مساوی

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5} \left(4x + \frac{3}{x^2} \right) \Rightarrow x = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^3 = 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[3]{3}$$

$$g'(x) = \frac{1}{5} \left(4 - \frac{6}{x^3} \right)$$

$$\Rightarrow g'(\sqrt[3]{3}) = \frac{1}{5} \left(4 - \frac{6}{3} \right) = 0 \quad g''(x) = \frac{12}{5x^4}$$

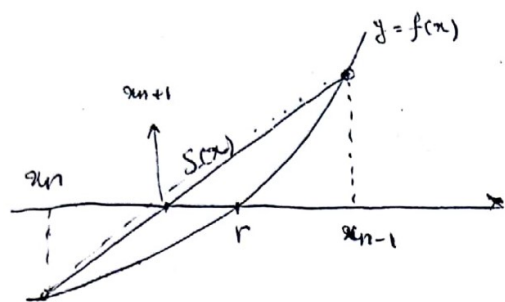
$$g''(\sqrt[3]{3}) = \frac{12}{5 \cdot 3^{4/3}} = \frac{4}{5\sqrt[3]{3}} \neq 0 \Rightarrow p=2 \quad \text{مرتبه همرازی}$$

Secant method

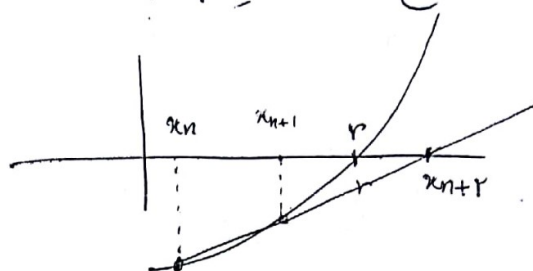
روش درختی

مساوی $f(x) = 0$ را برای x ، x_{n-1} و x_n در تکرار r بسازید.

این دو و $s(x)$ که در نقطه $\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ f(x_{n-1}) \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_n \\ f(x_n) \end{bmatrix}$ را رسم و خط می کشید که از آن



در نقطه ای قطع می کند که ترتیب جدید r است.



$S(x)$ در واقع چند جمله ای درجه اول است که از f را در x_n و x_{n-1} درون می کند

$$S(x) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}] (x - x_n) \quad (\text{ترتیب دوم})$$

طول نصف بر حسب خط $S(x)$ بعد از x_n نسبت به x_{n-1} است:

$$S(x_{n+1}) = f(x_n) + f[x_n, x_{n-1}] (x_{n+1} - x_n) = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]} \quad (1)$$

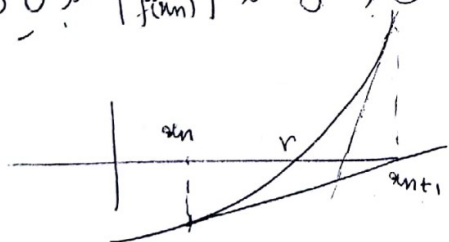
$n = 1, 2, \dots$

رابطه (1) روش دیگری برای حل معادله $f(x) = 0$ است. این روش برای هرانی از مرتبه

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \text{ است.}$$

روش نیوتن

در روش نیوتن x_{n+1} نگاه آنکه در $S(x)$ به x_n به معنی $f[x_n]$ تبدیل می شود



طول نصف (مقدار) بعد از x_n نسبت به x_{n-1} است:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2) \quad n = 1, 2, \dots \quad (f'(r) \neq 0)$$

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) + \dots$$

رابطه (2) روش نیوتن را می حل معادله $f(x) = 0$ است. نیوتن $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

تایم تکرار روش نیوتن را به صورت $x_{n+1} = g(x_n)$ می توان نوشت.

ریشه ساده ندارد. $f(x)$ نقطه ثابت g است. $g(x) = r$ پس در x نوبت

که در x نوبت g است. در x نوبت g است. $g(x) = r$

$$g'(x) = 1 - \frac{f' - f f''}{f'^2} = \frac{f f''}{f'^2} \Rightarrow g'(r) = \frac{f(r) f''(r)}{f'(r)^2} = 0$$

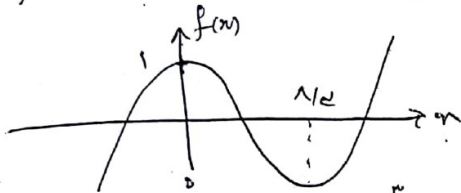
$$g''(x) = \frac{(f' f'' + f f''') f'^2 - 2 f' f'' f'''}{f'^4} \Rightarrow g''(r) = \frac{f'(r) f''(r)}{f'(r)^4} = \frac{f''(r)}{f'(r)^3} \neq 0$$

در حالت کلی $\Rightarrow p=2$

مثال: معادله $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ دارای 3 ریشه است. کوچکترین ریشه مثبت

معادله را با روش نیوتن تا 2 رقم اعشاری حل کنید.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 1 \quad f'(x) = 3x^2 - 8x \Rightarrow x(3x - 8) = 0 \quad x = 0, 8/3, \quad f(0) = 1$$



جواب معادله تا 2 رقم اعشاری

$$f(0.15) f(2.75) < 0$$

پس فرض $x_0 = 0.15$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 4x_n^2 + 1}{3x_n^2 - 8x_n}$$

$$\Rightarrow x_1 = 0.15 - \frac{0.15^3 - 4(0.15)^2 + 1}{3(0.15)^2 - 8(0.15)} = 0.1818$$

$$x_2 = 0.18374$$

$$\Rightarrow x = 0.184$$

تمرین های سری 1: فصل دوم کتاب سیدکار. تمرین های 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

(*) حل عددی معادلات دینفرانتیال

معادله دینفرانتیال $y' = f(x, y)$ با $y(x_0) = y_0$ $x_0 \leq x \leq x_1$ $y_0 \leq y \leq y_1$ f در $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ پیوسته و مشتق جزئی نسبت به y در آنجا محدود است. روش نیوتن برای حل عددی معادله دینفرانتیال

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_n = x_0 + nh \quad n = 1, 2, \dots, N$$

است. برای حل معادله دینفرانتیال با روش نیوتن، در هر مرحله از x_n به x_{n+1} حرکت می‌کنیم. در هر مرحله از y_n به y_{n+1} حرکت می‌کنیم. در هر مرحله از x_n به x_{n+1} حرکت می‌کنیم. در هر مرحله از y_n به y_{n+1} حرکت می‌کنیم.

در این رابطه y را به صورت تابعی از x در نظر می‌گیریم.

۱- روش تیلور مرتبه k :

فرض کنیم $y = y(x)$ جواب معادله (۱) باشد، تابع $y(x)$ را در x_n بسط می‌دهیم.

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_n)$$

از طرفی از رابطه (۱) داریم:

$$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$$

$$y(x_{n+1}) = y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} \frac{d}{dx} (y'(x)) \Big|_{x=x_n} + \dots$$

$$\frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} f(x, y) \Big|_{x=x_n} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x + f_y f$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} y'(x) \Big|_{x=x_n} = f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)$$

در این ترتیب می‌توانیم به ترتیب f ، f_x ، f_y و ... را محاسبه کنیم.

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad (۲)$$

رابطه (۲) روش تیلور مرتبه یک را می‌دهد.

مثال ۱: معادله $y' = x^2 + y$ را در بازه $[0, 1]$ با روش تیلور مرتبه یک حل کنید.

معادله مرتبه یک برای $h = 0.1$ معادله را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

با $x = 0.1$ داریم:

حل: در این روش تیلور مرتبه یک، y را به صورت $y = y(x)$ در نظر می‌گیریم.

$$y' = x^2 + y \quad y'' = 2x + 1 \quad y''' = 2$$

$$y_{n+1}^6 = y_n + y_n' h + \frac{h^2}{2} y_n'' + \frac{h^3}{6} y_n''' + \frac{h^4}{24} y_n^{(4)} \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 1$$

$$y_1 = y_0 + y_0' \times 0.1 + \frac{0.1^2}{2} y_0'' + \frac{0.1^3}{6} y_0''' + \frac{0.1^4}{24} y_0^{(4)} \quad y_0' = 1 \quad y_0'' = 1 \quad y_0''' = 3$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + 0.1 + 0.005 + 0.0001667 = 1.1051667 \rightarrow \text{تقریب ۱.۱۰۵}$$

$$y_1 = 1.1051667 \quad y_1' = 0.1^2 + 1.1051667 = 1.1151667$$

$$y_1'' = 0.1^2 + 1.1151667 = 1.1251667 \quad y_1^{(4)} = 3.1351667$$

$$\Rightarrow y_2 = 1.1051667 + 0.1 \times 1.1151667 + \frac{0.1^2}{2} \times 1.1251667 + \frac{0.1^3}{6} \times 3.1351667 = 1.2242$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) = y_n + 0.1 (x_n^2 + y_n) = 1.1 y_n + 0.1 x_n^2$$

$$y_1 = 1.1 \quad y_2 = 1.1 \times 1.1 + 0.1 \times 0.1^2 = 1.1201$$

$$y_3 = 1.1303 \quad y_4 = 1.1404 \quad y_5 = 1.1505 \quad \dots \quad y_{10} = 1.169$$

۲- روش رانگ-کوتا Runge-kutta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (۳)$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad k_2 = h f(x_n + h, y_n + k_1)$$

تقریبی از: $y'(x) = f(x, y)$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{h^2}{2} y_n'' + \frac{h^3}{6} y_n''' + \frac{h^4}{24} y_n^{(4)}$$

$$\Rightarrow y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) f'(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n)]$$

۳۴ در طریقی با استفاده از رابطه (۳) درج

$$y_{n+1} = y_n + 1/r \left[h f(x_n, y_n) + h f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n)) \right]$$

∴ $f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n))$...

$$f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n)) = f(x_n, y_n) + f_x(x_n, y_n)h$$

$$+ f_y(x_n, y_n) h f(x_n, y_n)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + 1/r h f(x_n, y_n) + 1/r h \left[f(x_n, y_n) + h f_x(x_n, y_n) \right.$$

$$\left. + h f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \right]$$

$$= y_n + h f(x_n, y_n) + h^2/r \left[f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n) \right]$$

...

$$h = 0.1, [0.1, 1.3] \quad y(0) = 1 \quad y' = 2xy^2$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1 \quad h = 0.1 \quad f = 2xy^2$$

$$k_1 = 0 \quad k_2 = 0.1 f(0.1, 1) = 0.02$$

$$\Rightarrow y_1 = 1 + 1/r \times 0.02 = 1.01$$

$$k_1 = 0.1 f(0.1, 1.01) = 0.1 \times 2 \times 0.1 \times 1.01^2 = 0.0202$$

$$k_2 = 0.1 f(0.2, 1.01 + 0.0202) = 0.1 \times 2 \times 0.2 \times 1.0302^2 = 0.0424$$

$$y_2 = 1.01 + 1/r (0.0202 + 0.0424) = 1.0312$$

$$k_3 = 0.1 f(0.3, 1.0312) = 0.1 \times 2 \times 0.3 \times 1.0312^2 = 0.0636$$

$$y_3 = 1.0312 + 1/r (0.0424 + 0.0636) = 1.0552$$

$$k_2 = 0.1 f(0.13, 1.04144 + 0.1 \cdot 0.448) = 0.1 \times 2 \times 0.3 (1.04144 + 0.1 \cdot 0.448)^2 = 0.07041$$

$$\Rightarrow y_3 = 1.04144 + 1/2 (0.1 \cdot 0.448 + 0.1 \cdot 0.7041) = 1.09844$$

۳- روش رانگ کرامت مرتبه ۴

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4} (k_1 + k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad k_2 = h f(x_n + h/2, y_n + k_1/2)$$

$$k_3 = h f(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \quad k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

مطابق با به بیان آن در آن روش رانگ کرامت مرتبه ۴، تقریبی نزدیک به مقدار مرتبه ۴
می باشد و فرض است که نسبت به روش رانگ کرامت مرتبه ۴ هم و به صورت گویا به تابع f می باشد

نکته های فصل پنجم کتاب سطر ۱۳-۱
کرده شده ۴۴

۱۳، ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱

روش حداقل مربعات Least Squares Method
یافته های تجربی: در $f(x_1, \dots, x_n)$ تابعی که منجر به x_i ($i=1, \dots, n$) باشد آنرا
"رایج" f نسبت به $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{bmatrix}$$

رایج f به تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ است (یعنی، بازنویسی این عبارت)

عبارت $f(x_1, \dots, x_n)$ را به صورت $f(x)$ می نویسند

رایج f به تابع $f(x_1, \dots, x_n)$ است (یعنی، بازنویسی این عبارت)

$$f(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

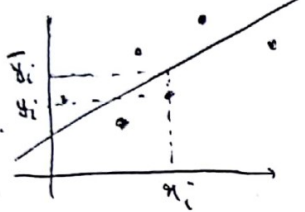
$$f(x) = [a_1 \dots a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a^T x$$

که در آن $a_{n \times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ در این حالت گرادیان f نسبت به بردار x را برابر

$$\nabla_x f, \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a \Rightarrow \nabla_x (a^T x) = a$$

خط مماسی بر آن نشان دارد که اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد و a یک بردار $n \times 1$ باشد
 $\nabla_x (x^T A x) = A x + A^T x$ اگر A متقارن باشد یعنی $A = A^T$ آنگاه $\nabla_x (x^T A x) = 2 A x$
 حاد و مربع $(AB)^T = B^T A^T$

رض کرد n نقطه $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} (i=1, \dots, n)$ در صفحه باشد. می خواهیم یک خط (خط رگرسیون) که از میان این نقاط بگذرد پیدا کنیم. این خط را با خط رگرسیونی (Regression) می نامند. در این بخش می خواهیم نحوه محاسبه آن را ببینیم.
 نامیده در راستای محور y و با خط $y = a_1 x + a_0$ محاسبه می شود.

 $f = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2$ حاد و مربع
 $\bar{y}_i = a_1 x_i + a_0$

دریم: $f = \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_i - a_0)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - h_i^T \theta)^2$

~~در این بخش می خواهیم نحوه محاسبه آن را ببینیم. این خط را با خط رگرسیونی (Regression) می نامند. در این بخش می خواهیم نحوه محاسبه آن را ببینیم.~~

~~$\nabla_x f$~~

~~$f = \sum_{i=1}^n (y_i - \begin{bmatrix} 1 & x_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - h_i^T \theta)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$~~

$h_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad e_i = y_i - h_i^T \theta$

بر بردار E را به دست می آوریم: $E = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$

$E^T E = [e_1 \dots e_n] \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = e_1^2 + \dots + e_n^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = f(\theta)$

$E = \begin{bmatrix} y_1 - h_1^T \theta \\ \vdots \\ y_n - h_n^T \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} - \begin{bmatrix} h_1^T \theta \\ \vdots \\ h_n^T \theta \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{n \times 1} - \begin{bmatrix} h_1^T \\ \vdots \\ h_n^T \end{bmatrix}_{n \times r} \theta_{r \times 1} \Rightarrow E = Y - H \theta$
 $H = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}_{n \times r}$

درجه اول $f(\theta)$ را به صورت زیر می‌نویسند:

$$f(\theta), E^T E = (Y - H\theta)^T (Y - H\theta) = Y^T Y - Y^T H \theta - \theta^T H^T Y + \theta^T H^T H \theta$$

$$= Y^T Y - 2Y^T H \theta + \theta^T H^T H \theta$$

درجه اول $f(\theta)$ را به صورت زیر می‌نویسند:

$$\nabla_{\theta} f = -2(Y^T H)^T + H^T H \theta + (H^T H)^T \theta = 0$$

$$\Rightarrow H^T H \theta = H^T Y \Rightarrow \theta = (H^T H)^{-1} H^T Y$$

$\begin{matrix} H_{n \times r} & H_{r \times n}^T \\ (H^T H)_{r \times r} \end{matrix}$

$$(H^T H)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \theta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T Y$$

$$H^T Y = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \theta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i) \\ -(\sum x_i)(\sum y_i) + n \sum x_i y_i \end{bmatrix}}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

TE

مثال: بهترین خط، استی که با داده‌های زیر، برازش می‌دهد، پیدا کنید:

| x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|-----|-----|
| y | 1 | 2.1 | 2.9 |

$$y = a_1 x + a_0 = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = (H^T H)^{-1} H^T Y = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{bmatrix}$$

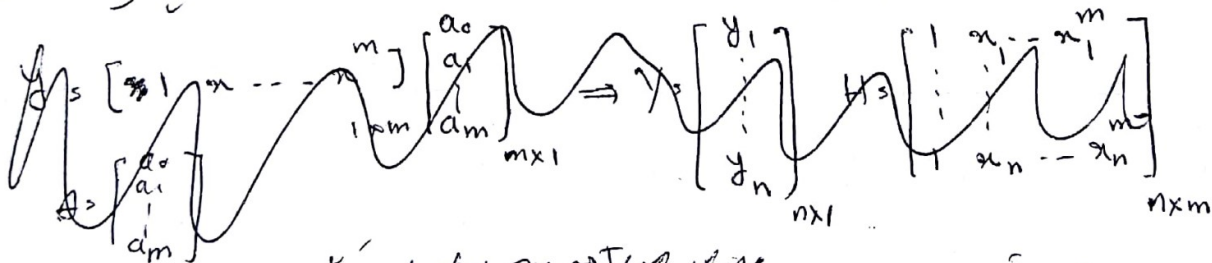
$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 14.9 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 14.9 \end{bmatrix}}{4} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 14.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.98 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y = -0.98x + 0.1}$$

جهت داده‌ای حداقل مربعات

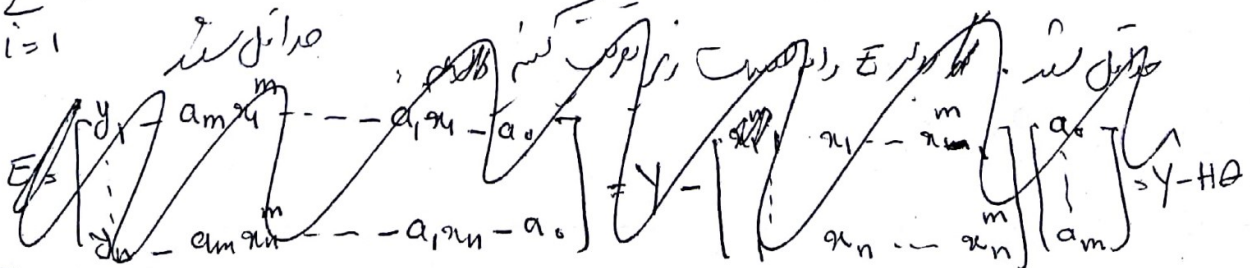
نمونه‌های داده‌ای (x_i, y_i) که $i = 1, \dots, n$ و m به تعداد داده‌ها می‌باشد.

بهترین برازش: $y = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$



بهترین برازش: $\hat{A} = (H^T H)^{-1} H^T Y$

$$E = \sum_{i=1}^n (y_i - a_m x_i^m - \dots - a_1 x_i - a_0)^2$$



$$e_i = y_i - a_m x_i^m - a_{m-1} x_i^{m-1} - \dots - a_1 x_i - a_0$$

$$= y_i - [1 \quad x_i \quad \dots \quad x_i^m] \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \Rightarrow E = Y - H\theta$$

نکته: $f(\theta)$ را به صورت درونی نزدیک به صفر قرار دهیم

$$f(\theta) = E^T E = (Y - H\theta)^T (Y - H\theta)$$

رایج f و θ می باشد که f را می بینیم می کند پس این مرتبه باشد مثل داده ها را

$$\theta = (H^T H)^{-1} H^T Y$$

برای θ به دست می آید

می خواهیم $y = a_0 e^{a_1 x}$ را به n نقطه $[x_i, y_i]$ در n نقطه



$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x \quad \begin{matrix} z = \ln y \\ a'_0 = \ln a_0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow z = a'_0 + a_1 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

موزم خطی تبدیل کردیم برای n نقطه $[x_i, y_i]$ را به $[x_i, z_i]$ تبدیل کردیم

$$\begin{bmatrix} a'_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T Z$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

در a_0 را به دست می آوریم

$$a_0 = e^{a'_0}$$

۴۲

جدول داده ها: $y = a_0 e^{a_1 x}$

| x | 1 | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 2 |
|---|-----|------|------|------|------|
| y | 0.1 | 0.19 | 0.38 | 0.78 | 1.54 |

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} \ln y_1 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ln a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = (H^T H)^{-1} H^T Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ln y_1 \\ \vdots \\ \ln y_5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.1228 \\ 0.2027 \end{bmatrix}$$

روش خطی: $y = \frac{1}{a_0 + a_1 x} \quad z = 1/y$

$$z = a_0 + a_1 x$$

$$Z = \begin{bmatrix} 1/y_1 \\ \vdots \\ 1/y_n \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$E = Z - H\theta \quad \text{minimize } E^T E \Rightarrow \theta = (H^T H)^{-1} H^T Z$$

$y = a_0 + a_1 x$