-1

$(1+i\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1+i\sqrt{3})$

$(1+i\sqrt{3}) \xrightarrow{\text{فرم قطبی}} r=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=2 \qquad \theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3} \qquad 1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$(1+\sqrt{3}i)^{-10} = (2e^{\frac{\pi}{3}i})^{-10} = 2^{-10}e^{-10\frac{\pi}{3}i} \Rightarrow$

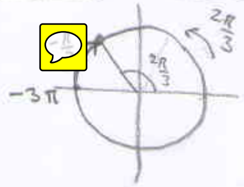
زاویه داده شده را ساده می کنیم

$\frac{-10\pi}{3} = -(3+\frac{1}{3})\pi = -3\pi-\frac{\pi}{3} \to \frac{2\pi}{3}$

$-\frac{10\pi}{3}$ همان $\frac{2\pi}{3}$ است

$= 2^{-10}e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2^{-10}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2^{-10}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$ ✓



$(-1+i)^7 = -8(1+i)$

$-1+i : \begin{cases} r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \theta=\tan^{-1}\frac{1}{-1} \quad \underset{x<0}{y>0} \to \theta=\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow -1+i=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$(-1+i)^7 = (\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i})^7 = 2^{\frac{7}{2}}e^{\frac{21\pi}{4}i} = 8\sqrt{2}e^{\frac{21\pi}{4}i}$

$\frac{21\pi}{4}$ را ساده می کنیم

$\frac{21\pi}{4} \to 5\pi+\frac{\pi}{4} \qquad 21 \div 4 = 5\frac{1}{4}$

$x<0$, $y<0$ ربع سوم می شود

$= 8\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -8(1+i)$ ✓

2- مکان هندسی

$|z-i| \leq |z+i|$ اگر $z=x+iy$

$\begin{cases} z-i = x+iy-i = x+(y-1)i \\ z+i = x+iy+i = x+(y+1)i \end{cases} \qquad |z|=\sqrt{x^2+y^2}$

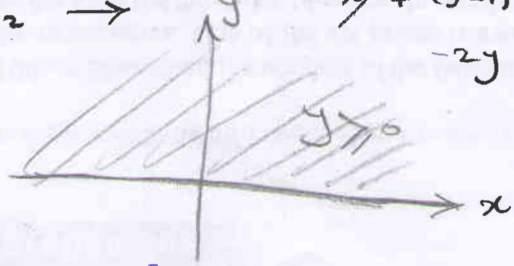
$|z-i|^2 = x^2+(y-1)^2$

$|z+i|^2 = x^2+(y+1)^2$

$\to$ لذا $\cancel{x^2}+(y-1)^2 \leq \cancel{x^2}+(y+1)^2$

$-2y \leq 2y \to 0 \leq 4y \to y\geq 0$

نیم صفحه بالای محور xها



$Re\left(\frac{Re z}{\bar{z}-2i}-3i\right) = \left(\frac{Re z}{|z|}\right)^2$

$\frac{Re z}{\bar{z}-2i} = \frac{x}{x-iy-2i} = \frac{x}{x-(y+2)i} \to \frac{x(x+(y+2)i)}{(x-(y+2)i)(x+(y+2)i)} = \frac{x^2+x(y+2)i}{x^2+(y+2)^2}$

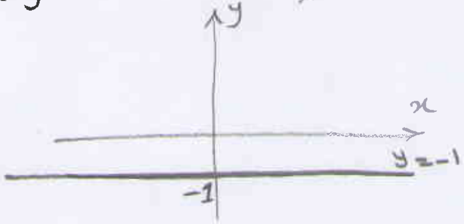
$Re\left(\frac{Re z}{\bar{z}-2i}-3i\right) = Re\left(\frac{x^2}{x^2+(y+2)^2}+\frac{x(y+2)}{x^2+(y+2)^2}i-3i\right) = \frac{x^2}{x^2+(y+2)^2}$ (1)

$\left(\frac{Re z}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ (2)

از برابر قرار دادن عبارتهای (1) و (2) داریم

$\frac{x^2}{x^2+(y+2)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \xrightarrow{x\neq 0}$ $\cancel{x^2}+y^2 = \cancel{x^2}+(y+2)^2 \xrightarrow{y\neq 0} \cancel{y^2} = \cancel{y^2}+4y+$

$4y+4=0 \to y$



شکل هندسی خط $y=-1$ است

$|z+1| = i$

به وضوح اندازه یک عبارت همواره عددی حقیقی است. لذا برابر بودن اندازه یک عبارت با i هیچگاه حاصل نمی‌شود پس شکل هندسی $\emptyset$ می‌باشد.

برای سادگی به توان رساندن باید در هر طرف تساوی فقط یکی از عبارات اندازه شامل z باشد یعنی $|z-3|+|z+3|=10$

$|z-3| = 10-|z+3|$: $|(x-3)+iy| = 10-|(x+3)+iy|$

طرفین را به توان 2 می‌رسانیم

$(x-3)^2+\cancel{y^2} = 100 - 2(10)|(x+3)+iy| + \left[(x+3)^2+\cancel{y^2}\right]$

$\cancel{x^2}-6x+\cancel{9} = 100-20|(x+3)+iy| + \cancel{x^2}+6x+\cancel{9}$

$0 = 100-20|(x+3)+iy|+12x$

$\to 20|(x+3)+iy| = 100+12x \xrightarrow{\times\frac{1}{4}} 5|(x+3)+iy| = 25-3x$

باز هم طرفین را به توان 2 می‌رسانیم

$25\left((x+3)^2+y^2\right) = 25^2+2(3x)(25)+9x^2$

$\cancel{25x^2}+25(\cancel{6})x+25\times 9+25y^2 = 25^2+6(\cancel{25})x+9\cancel{x^2}$

$16x^2+25y^2 = 25\times 16 \to \frac{16x^2}{25\times 16}+\frac{25y^2}{25\times 16}=1 \to \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$

شکل هندسی یک بیضی است با شعاع های $a=5$, $b=4$

$\left|\frac{z+1}{z+2i}\right| = 5$ $\frac{|(x+1)+iy|^2}{|x+(y+2)i|^2} = 25 \to \frac{(x+1)^2+y^2}{x^2+(y+2)^2} = 25$

$24x^2+24y^2-2x+100y+99=0$ معادله دایره

پس از ساده کردن

$24\left(x^2-\frac{1}{12}x\mp\frac{1}{24}\right)+24\left(y^2+\frac{100}{24}y\pm\left(\frac{25}{12}\right)^2\right)+99=0 \to \left(x-\frac{1}{24}\right)^2+\left(y+\frac{25}{12}\right)^2=\frac{125}{}$

3- ریشه های معادله زیر را بدست آورید و مکان آنها را روی دایره نشان دهید

$z^5 = -32$

$(re^{i\theta})^5 = (2^5 e^{i\pi + 2k\pi i})$

$re^{i\theta} = 2e^{\frac{(\pi + 2k\pi)i}{5}} \longrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5} \end{cases}$

(۳)

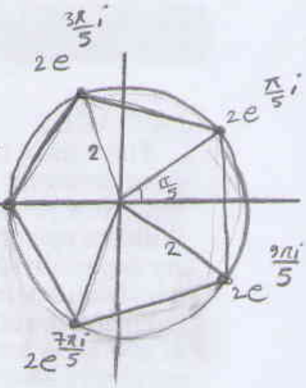
$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{5}i}$

$z_1 = 2e^{\frac{3\pi}{5}i}$

$z_2 = 2e^{\pi i}$

$z_3 = 2e^{\frac{7\pi}{5}i}$

$z_4 = 2e^{\frac{9\pi}{5}i}$



4- معادلات زیر را در مجموعه اعداد مختلط حل کنید

$1 + z^2 + z^4 + z^6 = 0$ لو $z^2 = t$

$1 + t + t^2 + t^3 = 0 \longrightarrow (1-t)(1+t+t^2+t^3) = (1-t^4) = 0$

$\longrightarrow (1-z^2)(1+z^2+z^4+z^6) = (1-z^8)$

پس ابتدا ریشه معادله $z^8 = 1$ را بدست می‌آوریم و سپس ریشه‌های معادله $z^2 = 1$ را از آن‌ها حذف می‌کنیم

$z^2 = 1 \rightarrow z = (e^{\frac{2k\pi i}{2}}) = e^{k\pi i} \quad \begin{cases} z_0 = 1e^{0i} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\ z_1 = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \end{cases}$

پس ریشه های ±1 را باید از ریشه ها حذف کنیم

حل $z^8 = 1$

$re^{i\theta} = e^{\frac{2k\pi i}{8}} \longrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{4} i \end{cases}$

$\boxed{z_k = e^{\frac{k\pi i}{4}}}$ $k = 0, 1, \ldots, 7$

$z_0 = e^{0i} = 1$ حذف

$z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_2 = e^{\frac{2\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$z_3 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_4 = e^{\pi i} = -1$ حذف

$z_5 = e^{\frac{5\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_6 = e^{\frac{6\pi}{4}i} = -i$

$z_7 = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

پس ریشه ها عبارتند از

$\underbrace{\left\{\pm i \quad و \quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i\right\}}_{6\ ریشه}$

$1 + 2z^2 + 4z^4 + 8z^6 = 0$ $2z^2 = t$

$1 + t + t^2 + t^3 = 0 \longrightarrow (1-t)(1+t+t^2+t^3) = (1-t^4)$

$\rightarrow (1-2z^2)(1+2z^2+4z^4+8z^6) = (1-16z^8)$

باید ریشه‌های $z^8 = \frac{1}{16}$ را پیدا کرده و ریشه‌های معادله $z^2 = \frac{1}{2}$ را از آن‌ها حذف کنیم

$z^2 = \frac{1}{2}$ $\quad (re^{i\theta})^2 = \frac{1}{2} e^{2k\pi i} \longrightarrow \begin{cases} r = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = k\pi \\ k = 0, 1 \end{cases}$ $\quad z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi i} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$z^8 = \frac{1}{2}$

$(re^{i\theta})^8 = \frac{1}{2} e^{0\pi + 2k\pi i} \longrightarrow \begin{cases} r = (\frac{1}{16})^{\frac{1}{8}} = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = \frac{k\pi i}{4} \end{cases}$

(F)

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow$ حذف $\quad k = 0, 1, \ldots, 7$

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+i)$

$z_2 = $ ______

$z_3 = $ ______

$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pi i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow$ حذف

z_5, z_6, z_7

مثل تمرین قبل تغییر z_k ها محاسبه می‌شوند

$1 - z^2 + z^4 - z^6 = 0$ $\quad t = z^2 \quad 1 - t + t^2 - t^3 = 0 \longrightarrow (1+t)(1-t+t^2-t^3) = (1+t^4)$

$\longrightarrow (1+z^2)(1-z^2+z^4-z^6) = (1+z^8)$

مانند تمرین های قبل ریشه های $z^8=-1$ را محاسبه کرده و ریشه های $z^2=-1$ را از آن برمی‌داریم

$z^4 + 4z^2 + 16 = 0 \qquad z^2 = t \qquad t^2 + 4t + 16 = 0$

روش Δ'

$t = \frac{-2 \pm \sqrt{\overset{-12}{4-16}}}{1} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{1} = 4\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\longrightarrow z^2 = t = 4\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

حال ریشه های $z^2 = 4\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ را محاسبه می‌کنیم

$\begin{cases} ① \; z^2 = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4e^{\frac{4\pi}{3}i + 2k\pi i} \longrightarrow z_0, z_1 \text{ دو ریشه} \\ ② \; z^2 = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4e^{\frac{2\pi}{3}i + 2k\pi i} \longrightarrow z'_0, z'_1 \text{ دو ریشه} \end{cases}$

① $(re^{i\theta})^2 = \left(2^2 e^{(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi)i}\right) \longrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ k = 0, 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ z_1 = 2e^{\frac{5\pi}{3}i} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$

② $(re^{i\theta})^2 = \left(2^2 e^{\frac{2\pi}{3}i + 2k\pi i}\right) \longrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_0 = 2e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ z'_1 = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \end{cases}$

$(z+1)^4=-1 \qquad z+1=t$

پس باید معادله $t^4=-1$ را حل کنیم

$$(re^{i\theta})^4 = e^{(\pi+2k\pi)i} \longrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4} \end{cases}$$

$$t_k = re^{\frac{\pi i}{4}+\frac{2k\pi}{4}i} \qquad k=0,1,2,3$$

$$t_0=e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2} \longrightarrow z_0+1=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2} \longrightarrow z_0=\left(\frac{\sqrt2}{2}-1\right)+i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$t_1=e^{\frac{3\pi}{4}i}=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2} \longrightarrow z_1+1=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2} \longrightarrow z_1=-\left(\frac{\sqrt2}{2}+1\right)+i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$t_2=e^{\frac{5\pi}{4}i}=-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i \longrightarrow \quad z_2=-\left(\frac{\sqrt2}{2}+1\right)-\frac{\sqrt2}{2}i$$

$$t_3=e^{\frac{7\pi}{4}i}=\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}i \longrightarrow \quad z_3=\left(\frac{\sqrt2}{2}-1\right)-\frac{\sqrt2}{2}i$$

5

$$z^4=\frac{-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}{-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{e^{\frac{3\pi}{4}i}}=e^{\frac{20\pi-18\pi}{24}i}=e^{\frac{\pi}{12}i}$$

$$(re^{i\theta})^4=e^{\frac{\pi}{12}i+2k\pi i} \longrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\frac{\pi}{48}+\frac{k\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z_0=e^{\frac{\pi}{48}i} \\ z_1=e^{(\frac{\pi}{48}+\frac{24\pi}{48})i}=e^{\frac{25\pi}{48}i} \\ z_2=e^{\frac{49\pi}{48}i} \\ z_3=e^{\frac{73\pi}{48}i} \end{array}$$

مقادیر a و b را چنان بیابید که $(1+i)$ یک ریشه معادله $z^5+az^3+b=0$ باشد.

$$1+i \longrightarrow r=\sqrt2, \quad \theta=\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt2 e^{\frac{\pi}{4}i}$$

جایگذاری می‌کنیم

$$\left(\sqrt2e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^5+a\left(\sqrt2e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^3+b=4\sqrt2e^{\frac{5\pi}{4}i}+a(2\sqrt2)e^{\frac{3\pi}{4}i}+b=0$$

حال مجدداً باید فرم نمایی را به مثلثاتی و سپس به فرم دکارتی تبدیل کنیم

$$4\sqrt2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)+2\sqrt2a\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)+b=0$$

$$4\sqrt2\left(-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{i}{\sqrt2}\right)+2\sqrt2a\left(-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{i}{\sqrt2}\right)+b=0$$

$$\rightarrow -4(1+i)+2a(-1+i)+b=0$$

$$\begin{cases} -4-2a+b=0 & \text{بخش حقیقی} \\ -4+2a=0 \longrightarrow a=2 & \text{بخش موهومی} \end{cases}$$

$$-4-2(2)+b=0 \longrightarrow b=8$$